

Apollonios ve Koni Kesitleri



Pergeli Apollonios
Antik Çağ geometrisinin önemli bir ürünü olan Koni'leri yazdı.

Giriş

Helenistik Dönem'in önemli matematikçilerinden birisi olan Apollonios (MÖ 262-200) Perge'de doğmuştur. Dönemin en gözde bilim merkezi olan İskenderiye'de Eukleides'in öğrencileri tarafından yetiştirilmiştir. Grek Dünyasında, geometri ve astronomi alanlarında Arkhimedes'den sonra yetişmiş, onunla kıyaslanabilecek en büyük bilgidir. Arkhimedes'den 25 yaş küçük olmasına karşın, aralarında hoca öğrenci ilişkisi olmamıştır, ancak onun çalışmalarından haberdardır. En önemli çalışması, geometri tarihinin seçkin örneklerinden biri olan ve bir koninin düzlemlerle kesilmesiyle oluşan şekillerin analizini konu alan *Konikler* adlı kitabıdır.

Eğitimi tamamlandıktan sonra Perge'ye dönmüş, bilimsel çalışmalarını burada sürdürmüş ve yapıtlarını Perge kralına sunmuştur. Bu yüzyılda Perge de önemli bir bilim ve kültür kentidir.

Konikler

Antik Çağ'da koniler konusunda ayrıntılı olarak yazılmış en önemli çalışma olan *Konikler* sekiz ciltten oluşmaktadır. Koni kesitlerine ilişkin o döneme kadar gelen bütün bilgilerin derlendiği kitapta Apollonios'un kendi özgün katkıları da yer almaktadır. Konikler'in sadece ilk yedi cildi bilinmektedir, ancak yalnızca ilk dördü Grekçe özgün biçimiyle günümüze kadar gelebilmiştir. Apollonios ilk defa koni kesitlerini bir ve aynı koniden elde etmiş ve böylece dört koni kesitini (daire, elips, parabol, hiperbol) birbirine bağlayabilmiştir. Bu koni kesitlerine elips, parabol, hiperbol adlarını veren de Apollonios'dur.

Apollonios koni kesitlerinin özelliklerini incelemiş ve şu belirlemelerde bulunmuştur:

Daire: Koni, koninin eksenine dik şekilde yatay olarak kesilirse,

Elips: Koni, kapalı bir eğri oluşturacak şekilde kesilirse,

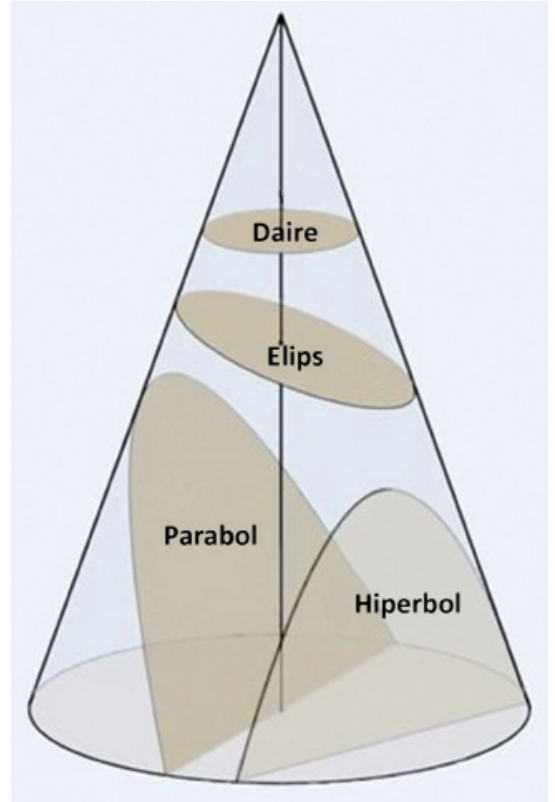
Parabol: Koni, koninin bir kenarına paralel şekilde kesilirse,

Hiperbol: Koni, ne paralel ne de kapalı eğri oluşturacak şekilde değil, herhangi bir şekilde kesilirse elde edilir.

Konikler'in birinci cildinde koni kesitlerinin elde edilişi üzerinde durulmuştur. İkinci cildinde asimptotlar, eksenler ve çaplar, üçüncü cildinde üçgenlerin, dikdörtgenlerin ve karelerin eşitliği, orantılı olmaları ve elips ile hiperbolün odakları tartışılmış, dördüncü cildinde çizgilerin harmonik

bölümlemesi ve koniklerin birbirleriyle dörtten daha fazla noktada kesişemeyecekleri gösterilmiştir. Beşinci cildinde, verilen bir noktadan bir koniye çizilebilecek çizgilerin dik olacağı ve normal adını alacağı, altıncı cildinde ise koniklerin benzerliğine yer verilmiştir.

Apollonios, Eukleides (MÖ 330-275) ve Arkhimedes (MÖ 287-212) ile birlikte geometriyi Helenistik Çağ'da en yüksek seviyeye getiren matematikçilerdendir. Kendisinden sonraki geometricilerin de dikkatini çeken koni kesitleri kuramını ilk defa Apollonios oluşturmuştur. Bu kuram, her dereceden geometrik eğriler kuramının ve yalnızca şekillerin biçimleri ve konumlarıyla ilgilenen, çizgilerin ve yüzeylerin kesişmeleri ve çizgisel uzaklıkların oranlarını kullanan geometri dalının başlangıcını oluşturması bakımından önemlidir.



Koni kesitleri

Apollonios, konik tanımına kendisinden öncekiler gibi sadece dik konileri değil tüm konileri almıştır. Dairesel tabanlı ve tepesinden her iki tarafa doğru, sonsuza kadar uzatılmış bir koni, bir düzlemlle kesilirse, düzlemlle koni yüzeyinin kesişimi olan eğrinin çember, hiperbol, elips veya parabol olacağını ilk kez Apollonios göstermiştir. Sonuç olarak dik ya da eğik, koni kesitlerinin aynı eğrileri vereceğini ilk kez ispatlamıştır. Konik kesitler, böylece modern bakış açısıyla ilk defa kavranmıştır. Dolayısıyla Apollonios'un Konikler adlı kitabı bu konuda yazılmış seçkin bir eserdir. Günümüze büyük ölçüde çevirileri kalmış olan kitabın sekizinci cildi ise kayıptır. Diğer ciltlerdeki bazı problemlerin çözümlerinin kayıp ciltte yer aldığı belirtildiğinden, tarih boyunca birçok geometrici sekizinci ciltte nelerin yer alması gerektiği konusunda spekülasyonlar yapmış ve bu cildin yeniden yazılması için çaba göstermiştir. Geometri tarihinin en özgün çalışmalarına sahne olan bu çabanın öncüsü İslam dünyasında yetişen önemli matematikçilerden biri olan İbn el-Heysem'dir (965-1039).

İbn el-Heysem Kahire'de kaldığı yıllarda geçimini istinsah (kitap çoğaltma) işiyle sağlıyordu. Bu dönemde istinsah ettiği kitaplar Eukleides'in *Elementler'i* (Usûl el-Hendese), Ptolemaios'un (MS 150'ler) *Almagest'i* (El-Mecisti), Theodosios (öl. MS 395) ve Menelaus'un (MS 1. yy) Küre Kesitleri ve Apollonios'un *Konikler'i*dir. *Konikler'in* İbn el-Heysem tarafından çoğaltılmış elyazması kopyası Süleymaniye Kütüphanesi'ndedir.

İbn el-Heysem'in çoğalttığı bu kitaplar dönemin yüksek geometri bilgisinin yer aldığı çalışmalar olması bakımından dikkat çekicidir ve İbn el-Heysem'in geometri bilgisi hakkında da açık bir fikir vermektedir. Araştırmalarını koni kesitleri üzerinde yoğunlaştıran İbn el-Heysem, sonuçta koni kesitleri kuramını, pergel ya da cetvelle çizilemeyen -örneğin düzgün yedigen (heptagon)- ya daha önceden bilinen ya da bizzat kendisinin ortaya attığı problemlerin çözümüne uygulamıştır. Bu anlamda iki koninin kesişme noktasının belirlenmesi konusunda ısrarla çalışan ilk matematikçilerden biridir.

İbn el-Heysem'in, *Makâle fî Temâmi Kitâb el-Mahrûâtât* (Koni Kesitlerinin Tamamlanması Üzerine) adını verdiği çalışmasının girişinde yazdıklarından anlaşıldığı üzere, Apollonios'un *Konikler'inin* kayıp olan sekizinci cildini, ilk yedi ciltte elde ettiği bilgileri ışığında yeniden kurmayı amaçlamıştır ve başarılı da olmuştur. Diğer taraftan bir koniye nasıl teğet çizileceği, teğetin verilen orana göre yayı nasıl bölüneceği

ve benzeri problemlerin açıklanmasını amaçlamıştır. İbn el-Heysem'in, incelenmeden geliştirilmesinin doğru olmadığını belirttiği bir diğer problem de, verilen bir noktadan bir koniye kesen bir doğrunun nasıl çizileceğiyle ilgilidir. Ona göre, ele alınması gereken bu problemler, Apollonios'un ilk yedi ciltte ele aldığı problemlerin devamıdır. İbn el-Heysem, böyle bir çalışmaya neden gereksinim duyduğunu da şöyle belirtmektedir:

"Apollonios'un düşüncesinin sağlamlığına sonsuz güvenimiz olduğundan, bu meselelerin sekizinci ciltte incelenmesi gerektiğine karar verdik. Bizde bu kesin düşünce oluşuktan sonra, bu problemleri inceleyerek bir makale meydana getirdik ve bunun da sekizinci cildin yerini tutacağına inandık. Böylece Konikleri tamamlamış olduk. Bu problemleri çözebilmek ve sekiz cilt arasında en iyisini meydana getirebilmek için analiz, sentez ve yenileme yöntemini kullandık."



Düzgün heptagon

Kayıp olan son ciltte neler olacağı konusunda ilk yedi cilde bakarak tahminlerde bulunma eğilimi yakın zamana kadar bilim dünyasında ilgi görmeyi sürdürmüştür. Bu ilgiyi gösterenlerden biri de 18. yüzyılın ünlü matematikçisi ve astronomu Edmund Halley'dir (1656-1724) ve 1710'da *Apollonii Pergaei Conicorum Libri Octo* adlı bir kitap yazmıştır. İbn el-Heysem'in çalışması kuşkusuz Halley'den yaklaşık 700 yıl önce olması dolayısıyla ayrıcalığa sahiptir.

Astronom Olarak Apollonios

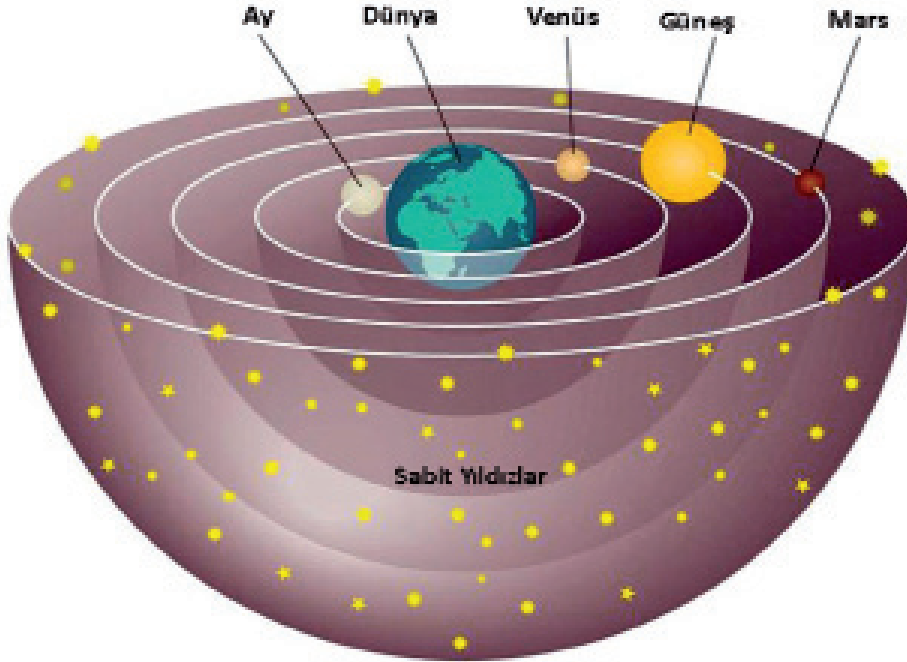
Apollonios astronomiyle de ilgilenmiştir. Bu konuda yaptığı çalışmalarla matematiksel astronominin kurucusu kabul edilir. Gezegenlerin hareketlerini açıklamak için, gökyüzünü ilk defa geometri aracılığıyla anlamlandırma ya çalışan Knidoslu Eudoksos'un (MÖ 408-355) ortak merkezli küreler sistemi yerine çember merkezli ve dış merkezli düzeneklerden oluşan

matematiksel bir model önermiştir. Apollonios bu düzenekleri gezegen hareketlerinin açıklanmasına uygulamamış, yalnızca teklif etmekle yetinmiştir. Düzeneklerin gezegen hareketlerinin açıklanmasında ve ortaya çıkan problemlerin anlamlandırılmasında taşıdığı önemi ilk fark eden Helenistik dönemin seçkin astronomu Ptolemaios olmuştur.

Gezegen hareketlerinin temel ilkesi düzgün dairesel hareket ilkesidir ve bu ilkeyi değiştirmeksizin Güneş'in ve Ay'ın mesafe ve hız farklılıklarının hesaplanması önem taşır. Apollonios bu hesaplamayı olanaklı kılan matematiksel modeli geliştiren bilginidir. Modelin esası şudur: Kendisinden önce Aristarkhos (MÖ. 310-230) adlı bir astronom, ilk kez Güneş merkezli bir evren modeli önermişti. Bu model Kopernik'ten (1473-1543) yaklaşık 1300 yıl önce geliştirilmiş olması dolayısıyla dikkat çekicidir. Ancak Aristarkhos modelini gerektiği şekilde destekleyecek bir fizik sistemi oluşturamamıştı. Dolayısıyla fizik temelden yoksun bir model olarak kalmıştı. O dönemde egemen fizik sistemi de Yer'in merkezde ve durağan şekilde kalması gerektiği düşüncesine dayalı Aristoteles fiziğiydi ve bu fizik ister istemez Aristarkhos'un evren modeline destek sağlayamazdı. Çünkü Aristarkhos Yer'in hareket ettiği bir model öngörüyordu. Bu nedenle Güneş merkezli evren modeli Kopernik tarafından yeniden ileri sürülünceye kadar tutunamadı ve geçmişten beri gelen Yer merkezli evren modeli geçerliliğini sürdürdü. Ancak bu modelin de gezegen hareketlerinin açıklanmasında ciddi sıkıntıları vardı. Örneğin gezegenin bazen Yer'e yakınlaşmış, bazen uzaklaşmış gibi görünmesini veya bazen hızlı bazen de yavaş hareket ediyor gibi algılanmasını açıklamak oldukça zordu. Bu yüzden Knidoslu Eudoksos'un ortak merkezli küreler modeline sayısız yama yapılmıştı. Bu da sistemin kavranmasını güçleştirmekteydi. İşte Apollonios bu sıkıntılara çözüm olacak bir hesaplama düzeneği geliştirdi. Yukarıda değinildiği üzere dış merkezli ve çember merkezli düzenekleri astronomi problemlerine uygulamadı, ancak bu düzenekler Yer merkezli evren modelinin uzun yıllar kullanılmasını sağladı.

Dış merkezli Düzenek

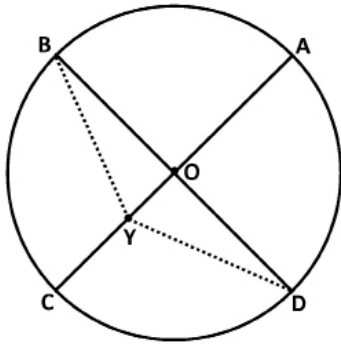
Bu düzenekle hem mesafe hem de hız değişimi açıklanmaktadır. Gezegen dairesel yörüngede düzenli şekilde dolanmaktadır, ancak Yer dairesel yörüngenin merkezinden kaydırıldığı için, bazen Yer'e yakınlaşıyor bazen de uzaklaşıyor gibi gözükmemektedir. Şekilde gezegen A noktasındayken Y'ye (Yer) daha uzak, B noktasındayken daha yakın görünür. Çünkü: $AY > CY$



Knidoslu Eudokos'un Evren Tasarımı

Eudokos, evreni iç içe geçmiş kürelerden oluşan bir yapı olarak kabul etmiştir. Evren sınırlıdır ve merkezinde Yer bulunmaktadır. Güneş dâhil bütün gezegenler Yer'i çevreleyen kürelere çakılıdır ve küre döndüğü gezegenler de dönmektedir. Eudokos'un, tasarladığı bu geometrik gökyüzü modellemesine ortak merkezli küreler sistemi adı verilmiştir. Bu modelle ilk defa bir gök cisminin belirli bir süre sonra nerede bulunacağını matematiksel olarak belirlemek olanaklı olmuştur. Aslında Eudokos'un çözümü son derece ilginçtir. Bir kürenin üzerinde bulunan bir gezegen, bu kürenin eksenlerinden birisi üzerinde dolanırken, merkezdeki Yer'in çevresinde dairesel yörüngeler çizer. Böylece küreleri artırmak suretiyle daha karmaşık hareketleri betimlemek olanaklı olur ve gezegenlerin gökyüzündeki hareketleri ile bu iç içe geçmiş küre hareketleri ilişkilendirilebilir. Nitekim Eudokos bu amaçla ortak merkezli kürelerin sayısını 27'ye çıkarmıştır. Böylece ilk defa gökyüzünde olan bitenler, matematiksel bir modelle anlaşılmış oluyordu. Gerçi ortak merkezli küreler sistemi, çok karmaşıktı ve uygulamada da oldukça başarısızdı, ama sonuçta olup bitenleri anlamlandırmaya yönelik kuramsal bir girişimdi ve yaklaşık da olsa görünüşü kurtarıyordu. Eudokos'un ortaya koyduğu geometrik tabanlı Yer merkezli ortak küreler sistemi, daha sonra Aristoteles (MÖ 384-322) tarafından mekanik bir modele dönüştürülmüştür.

Hız değişiminin nedeni ise gezegenin görünüm açısının farklı olmasıdır. Gerçekte AB ve CD yayları eşittir ve dolayısıyla gezegen bu yayları eşit hızla geçecektir. Ancak gözlemci dairenin merkezinde O'da değil de Y'de olduğundan, gezegen AB yayını kat ederken daha yavaş, CD yayını kat ederken de daha hızlı hareket ediyormuş gibi görünecektir. Çünkü AB yayını gören açı (AYB), CD yayını gören açıdan (CYD) daha küçüktür.



Dışmerkezli düzenek

Bu düzenekle hem mesafe hem de hız değişimi gösterilebilmektedir.

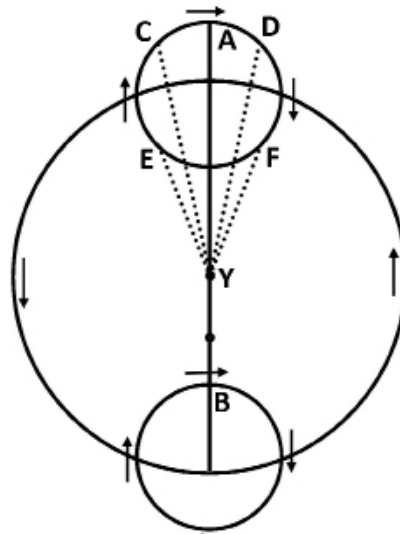
Çembermerkezli Düzenek

Bu düzenekte büyük dairenin çemberini merkez alan küçük bir daire vardır ve gezegen küçük daire üzerinde dolanır. Çembermerkezli adı verilen bu düzenekte, gezegen A'dayken merkeze AY mesafesinde, B'deyken BY mesafesinde bulunur. $AY > BY$ olduğundan, gezegenin bazen Yer'e uzak bazen de yakın görünmesi kolayca anlamlandırılmış olur.

Bu düzenekte hız değişimi de benzer şekilde görünüm açısıyla açıklanabilmektedir. CD ve EF yayları eşit olduğu halde, CD daha küçük bir açı altında görüldüğü için gezegen bu yay parçasını kat ederken daha yavaş hareket ediyormuş gibi görünecektir.

Yer merkezli evren modeli 1543 yılında Kopernik tarafından Güneş merkezli evren modeli önerilinceye kadar egemen olmuştur. Bu egemenliğin sürmesinde Apollonios'un geliştirdiği bu iki düzeneğin etkisi çok büyüktür. Çünkü olgusal gerçeklik sağduyuya bu düzenekler yardımıyla kabul ettirilebilmiştir. Eğer yörüngeler çemberse, çember üzerindeki her nokta merkeze eşit mesafede

olmak durumundadır. Bu durumda gezegen de çember üzerinde dolanırken, her noktada merkezdeki gözlemciye eşit mesafede olacaktır. Oysa gözlemlenen veya algılanan gerçeklik, gezegenin yaklaşıp uzaklaştığını söylemektedir. İnkilem, bu iki geometrik model aracılığıyla çözüme kavuşturulmuştur. Apollonios'un Kopernik'in Güneş merkezli evren modelini önermiş olmakla beraber bu iki düzeneği kullanmayı sürdürmüş olması, düzeneklerin işlevinin ne denli önemli olduğunu göstermektedir. Düzeneklerin işlevi Kepler'in gezegen yörüngelerinin elips olduğunu belirlemesine kadar aralıksız devam etmiştir.



Çembermerkezli düzenek

Kaynaklar

- Acerbi, F., "Apollonius of Perga", *New Dictionary of Scientific Biography*, Cilt I, Ed. Noretta Koertge, Thomson & Gale, 1970.
İbn el-Heysem, Kitâb el-Mahrûât,
Çeviren: Nazım Terzioğlu, *Das Achte Buch zu den Conica des Apollonios von Perga*,
Matematik Araştırmaları Enstitüsü, 1974.
Tekeli, Sevim ve ark., *Bilim Tarihinin Giriş*, Nobel, 2010.
Toomer, G. J., "Apollonius of Perga",
Dictionary of Scientific Biography, Ed. C. C. Gillispie, Cilt I, Charles Scribner's Sons, 1970.
Topdemir, H. G. & Unat, Y., *Bilim Tarihi*, Pegem, 2008.
Unat, Y., *Astronomi Tarihi*, Nobel, 2001.