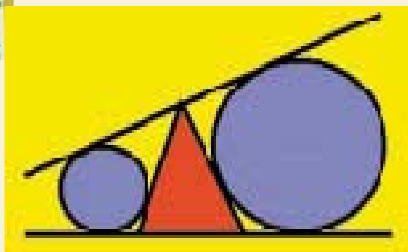
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Arada Kalmak

İki çember ve bir ikizkenar üçgen şekildeki gibi doğrular arasına yerleştiriliyor. Eğer çemberlerin çapları toplamı 2 birim ise üçgenin taban kenarına inen yüksekliğinin uzunluğunu bulunuz.



Abaküsle Çalışmak

Bugünkü kadar karmaşık hesaplamaların olmadığı o eski zamanlarda bir matematikçinin en güvendiği aracı abaküsüydü. Ne var ki bu nostaljik araç zamanla yetersiz kaldı ve yerini o küçücük, her cebe sığan hesap makinelerine bıraktı. Bu soruda bir bakıma abaküsün öcünü alıyoruz ve hesap makinesi kullanılmasına izin vermiyoruz. Sadece kağıt ve kaleminizle $29^{200}.2^{151}$ sayısının mı yoksa $5^{279}.3^{300}$ sayısının mı daha büyük olduğunu bulabilir misiniz?

Sihirli Formül

İlginç bir şekilde, aşağıda yer alan formüldeki n yerine hangi tamsayıyı koyarsanız koyun yine bir tamsayı elde ediyorsunuz.

$$n^5/5 + n^3/3 + 7n/15$$

Bunun nasıl gerçekleştiğini ispatlayabilir misiniz?

Fibonacci ve 10 Basamaklı Sayılar

Terimleri 10 basamaklı sayılar olan ve aşağıdaki özelliklere sahip bir dizi düşünelim:

- Sayılar 2 ve 5 rakamlarından oluşuyor
- Sayıların hiç birisinde iki tane 2 rakamı yan yana gelmiyor.

Bu dizinin kaç farklı terimi olduğunu bulunuz. Çözüme geçmeden önce sorunun ismini bir daha okumanızı öneririm.

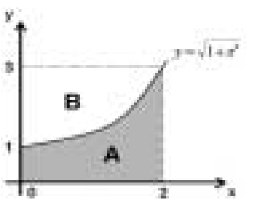
Geçen Ayın Çözümleri

Farklı Bakabilmek:

İntegraldeki toplamayı ikiye ayırabildiğimiz için önce

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{1+x^3}\right)dx$$

integralini düşünelim. Soruda ipucu olarak integrale alan hesabı yöntemi olarak yaklaşmamız gerektiğini söylemiştik. Şekilde de görüldüğü gibi A integralimiz gri bölgenin alanına eşittir.



Sorudaki integralin ikinci parçasına geçmeden önce isterseniz gelin gri bölgenin üstünde kalan B alanını inceleyelim. Bu alanı da x-y dönüşümü kullanarak integral şeklinde yazarsak, dönüşümde

$$y=\sqrt{1+x^3} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y^2-1}$$

olur ve B alanı aşağıdaki integrale dönüşür.

$$B = \int_{y=1}^{3} \left(\sqrt[3]{y^2-1}\right)dy$$

B integraline biraz dikkatli bakalım. Sizce de sorudaki

$$\int_0^2 \left(\sqrt[3]{x^2+2x}\right)dx$$

integraline benzemiyor mu? y = x+1 dönüşümünü uyguladığımızda daha iyi göreceksiniz.

$$\int_{y=1}^{3} \left(\sqrt[3]{y^2-1}\right)dy = \int_{x=0}^{2} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2-1}\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt[3]{x^2+2x}\right)dx$$

Bu durumda sorudaki integral A+B alanının toplamına eşit olur. Geriye sadece dikdörtgenin alanını hesaplamak kalıyor. Sonuç: 3.2 = 6'dır.

Sayılardan Kule:

$y = x^8$ olarak alırsak $x = y^{1/8}$ olur. Bu durumda sorudaki eşitlik

$$\left(y^{1/8}\right)^y = 2$$

şekline dönüşür. Bu da $y^{y/8}$ = 2 eşitliğine eşittir. Her iki tarafın da 8. dereceden kuvvetini alırsak $y^y = 2^8$ olur. Küçük bir deneme yanılma yapılarak $y^y = 2^8 = 4^4$ görülebilir. y'nin 4'e eşit olduğunu bulduk. $x = y^{1/8}$ olduğuna göre aradığımız $x = 4^{1/8} = 2^{1/4}$'tür.

Çarpanlara Ayırma:

Soruda öncelikle iki eşitliğin ayrı ayrı kaçar tane reel kökü olduğunu bulmak son derece faydalı olacak. Eğer iki fonksiyonun grafiğini çizerseniz ikisinin de x eksenini sadece 1 noktada kestiğini göreceksiniz. Yani her iki eşitliğin de sadece birer reel kökü var. Yerimizin kısıtlı olması nedeniyle bunu gösteremiyorum ama bana güvenebilirsiniz. Şimdi ise hiç beklenmeyen bir hamle yapacağız ve a = x + 2 yani x = a - 2 dönüşümünü uygulayacağız. x yerine (a-2) koyduğumuzda eşitliklerimiz aşağıdaki hale dönüşür:

$a^3 - 2a - 19 = 0$

$a^3 - 2a + 19 = 0$

Eşitlikte çift dereceli bir terim olmadığı için dikkat ederseniz birinci eşitliği sağlayan reel kök a_1 ise ikincisinin reel kökü $a_2 = (-a_1)$ olur. a_1 ve a_2 iki eşitliğin tek reel kökleridir. Bu durumda $a_1 + a_2 = 0$'dır. Çözümün başında yaptığımız dönüşümü tekrar tersine çevirelim. $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = 0$ ise $x_1 + x_2 = -4$ olur. Köklerin kendisini bulmadan sonuca olaşmış olduk. Sonuç = -4'tür.

Ne Kadar Arttı?

Toplam sembolünü kullanarak A sayısını

$$A = \sum_{n=1}^{71} n.(n+1)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da

$$\sum_{n=1}^{71} n^2 + n$$

'ye eşit olur. Şimdi de toplamları ayrı ayrı hesaplayalım:

$$A = \sum_{n=1}^{71} n^2 + \sum_{n=1}^{71} n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big|_{n=71} + \frac{n(n+1)}{2}\Big|_{n=71}$$

Formüllerde n yerine 71 değerini koyduğumuzda

$$A = \frac{71.72.143}{6} + \frac{71.72}{2}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeleri yaparsak A = 71(12.143 + 36) sayısını elde ederiz. Böylece güzel sayımızın 71'e bölündüğünde sıfır kalanını vereceğini ispatlamış olduk.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

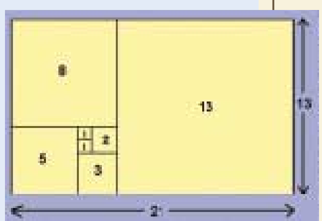
Fibonacci Sayıları

Elinizde bir papatya var ve siz de "seviyor, sevmiyor" yapmaya mı niyetleniyorsunuz? Bir matematikçiye soracak olursanız emin olun size "seviyor" ile başlamınızı öğütleyecektir çünkü sizin için son derece yararlı olacak bu öğüt, 13. yüzyılda yaşamış Leonardo Fibonacci'nin bulduğu Fibonacci sayılarıyla çok yakından ilişkilidir.

Leonardo Fibonacci, 1202 yılında yazdığı "Liber Abaci" adlı matematik kitabıyla her ne kadar Avrupa'nın Hint-Arap sayı sistemi (1,2,3....) ile tanışmasını sağlamış olsa da asıl ününü kitabında değindiği Fibonacci sayı dizisiyle kazanmıştır. Bir çoğumuz, bir çift tavşanla başlayıp giderek artan sayılarıyla ilgili problemlere rastlamıştır. Bu tip problemlerde genelde Fibonacci sayı dizisi kullanılır. Peki bu sayı dizisi nedir? Dizinin n. elemanını F_n olarak gösterirsek $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 'ye eşit olur. Daha genel bir ifadeyle: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (n = 3,4,5...)

Bu durumda dizi şu sekilde ilerler: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Dizimiz ne kadar sessiz ve sıradan gözükse de onu ilginç kılan doğanın da bu diziyi birçok işinde kullanmasıdır. Zambaktan yabani güle, ayçiçeğinden papatyaya kadar birçok çiçeğin taç yaprağı sayısı bir Fibonacci sayısıdır. Mesela bir papatyanın taç yaprak sayısı genelde Fibonacci ailesinden 21, 34 ("seviyor" ile başlamak için uygun değil!), 55 veya 89'dur.

Dizinin doğada bol bol görülmesi dışında matematiksel olarak da birçok ilginç özelliği var. Örneğin ardışık Fibonacci sayılarının birbirlerine oranlarını inceleyelim. $F_2/F_1 = 1$, $F_3/F_2 = 2$, $F_4/F_3 = 1.5$, $F_5/F_4 = 1.666...$, $F_6/F_5 = 1.6$, $F_7/F_6 = 1.625$, $F_8/F_7 = 1.615...$, $F_9/F_8 = 1.619...$ Dizi elemanlarını bu şekilde bölerek sonsuza kadar gittiğimizde sonucun bir irrasyonel sayıda limitlendiğini görürüz. Bu gizemli 1.618033989... irrasyonel sayısına "altın oran" denilmekte. Şimdi de altın oranı yaratan herhangi ardışık iki Fibonacci sayısını kullanarak bir dikdörtgen çizelim. Şu anda belki farkında değilsiniz ama çizdiğiniz dikdörtgen aslında sanat tarihi boyunca birçok sanatçının kullandığı ve adı da "altın dikdörtgen" olan bir şaheserdir. Nedeni psikloglarca tam anlaşılamamasına rağmen bir altın dikdörtgenin insan gözüne en hoş gelen dikdörtgen olduğu yapılan araştırmalarla kanıtlanmıştır. Eski Yunan mimarisinin en güzel örneklerinden Parthenon Tapınağının ön cephesi tam anlamıyla bir altın dikgörtgendir. Bunun dışında bazı piramitlerde, Leonardo Da Vinci'nin bazı eserlerinde hatta bayraklarda, kibrit kutularında, gazete yaprak ebatlarında dahi altın dikdörtgenlere rastlanabilir. Altın dikdörtgenin en güzel özelliklerinden biri içinden kareyi çıkardığınız takdirde geride kalan dikdörtgenin yine bir altın dikdörtgen olmasıdır. Şekildeki 21x13'lük altın dikdörtgenden çıkarılan her karenin kenar uzunluğu görüldüğü gibi bir Fibonacci sayısı oluyor.



Önümüzdeki ay "Matematiğin Şaşırtan Yüzü"nde Fibonacci sayıları ve altın oranla ilgili birbirinden ilginç özellikleri aktarmaya devam edeceğiz.