

Sinirlerde Gizlenen Matematik

Hepimiz matematiği konu alan fıkralar duymuşuzdur. Bu fıkralarda matematikçiler genellikle gerçek problemlerin çözümlünden çok soyut problemlerle ilgilidir. Örneğin böyle fıkralardan birinde matematikçi, fizikçi ve kimyacı ıssız bir adaya düşer. Bir süre sonra acıkırlar. Yanlarında konserveleler vardır. Fizikçi konserveyi fiziksel yöntemlerle, kimyacı da kimyasal yöntemlerle açar. Sıra kendisine gelince matematikçi řu muhteşem cümleyi söyler: “Açık olduğunu varsayalım”.

Gerçekten matematik tamamen soyut bir bilim mi?
Yoksa gerçek problemlere cevap arayan birçok bilim dalının anası mı?



Bu yazıda matematiğin en genç çocuklarından birinden, matematiksel sinirbilimden bahsedeceğiz. Matematiksel sinirbilimi anlatarak, matematiğin hayatımızı nasıl kolaylaştırdığını göstermeye çalışacağız. Matematiksel sinirbilim nedir? Matematiği kullanarak sinirlere ait süreçleri modellemeyi amaçlayan, disiplinlerarası bir bilim mi? Özellikle öğrenme ve bellek gibi konuları incelemek için sinir ağlarının ayrıntılı biyofiziksel modellerini oluşturan, hesaplamalı bir bilim mi? *Bilim ve Teknik*'te beynimizin yapısını anlatan, nasıl öğreniriz, nasıl karar veririz gibi soruları yanıtlamaya çalışan yazılarla karşılaştınız. Bilim insanları beynin yapısını hâlâ bütün ayrıntılarıyla bilmiyor, dolayısıyla da bu konu devamlı araştırılıyor. Biz de şimdi sinir hücrelerinden bahsedelim ve beynimizin ne kadar karmaşık bir yapısı olduğunu görelim. İlk olarak sinir hücresinin biyolojik yapısını ele alalım.

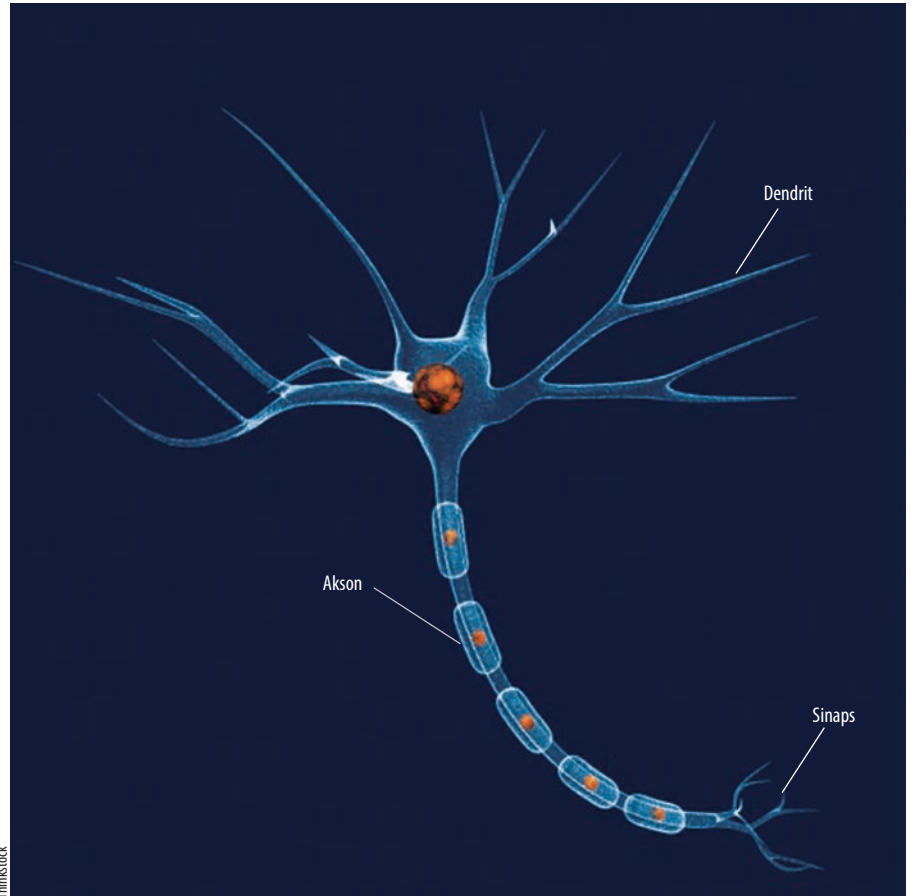
Sinir hücrelerinin çoğu üç bölümden oluşur: Çevreden gelen uyarıları alan, kısa ve çok sayıda özelleşmiş uzantı (dendrit), hücreye gelen uyarıları başka bir hücreye taşıyan, uzun bir akson ve hücre gövdesi. Sinir hücrelerinin diğer sinir hücrelerine mesaj iletmesine olanak tanıyan özelleşmiş bağlantı noktalarına da sinaps denir. Aksonların gönderdiği kimyasal sinyaller dendritlerce alınıp elektriksel sinyallere dönüştürülür; bu elektriksel sinyaller diğer tüm sinapslardan gelen elektriksel sinyallere eklenerek veya çıkarılarak diğer bir sinapsa iletilir veya iletilmez. Daha sonra elektriksel potansiyeller, akson boyunca komşu sinir hücresinin dendritleri üzerindeki sinapslara iletilir ve bu süreç tekrarlanır.

Matematiksel sinirbilim, uygulamalı matematiğin doğadaki karmaşık sinir sistemlerinin dinamiklerini anlamak için kullanılan, hesaplama teknikleri içeren yeni bir dalı. Sinirbilimin, deneysel olarak gözlemlenen davranışlara açıklık getirmek için matematiği anahtar olarak kullanan bir alanı da diyebiliriz. 1952'de Alan Hodgkin ve Andrew Huxley lineer olmayan adi diferansiyel denklemleri kullanarak aksiyon potansiyelinin matematiksel

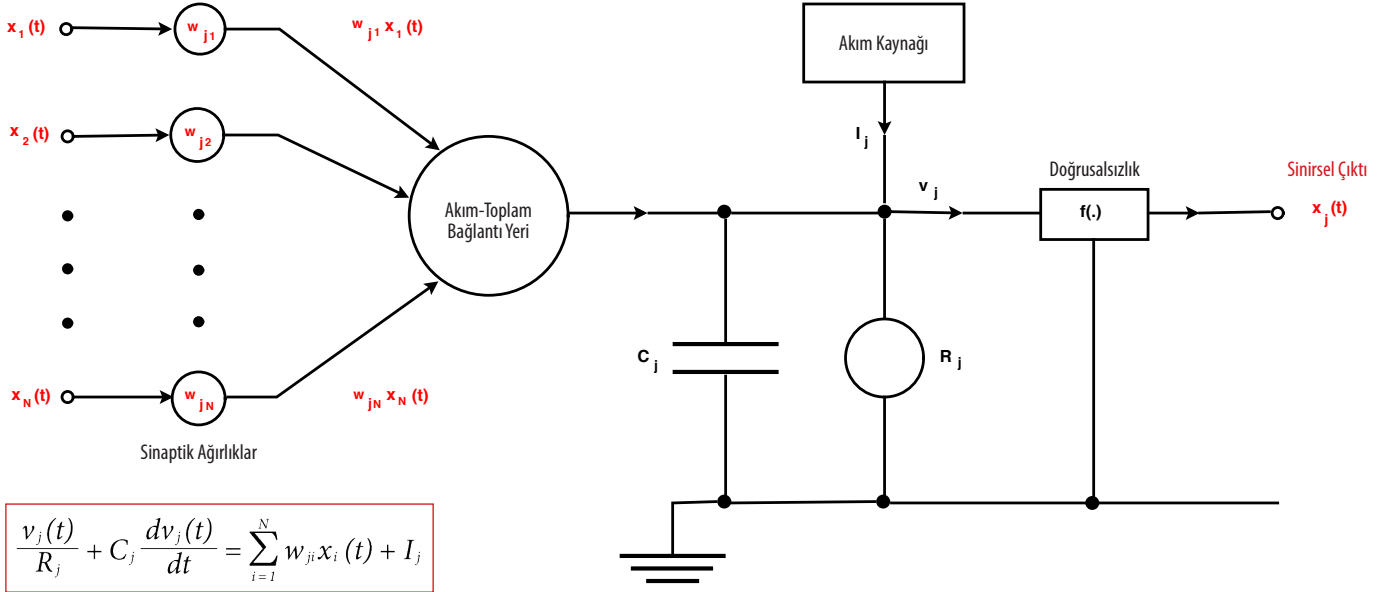
Kavramlar Kutusu: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ şeklinde tanımlı bir diferansiyel denklem sistemi için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalara denge noktası denir. Sistemin kararlı veya kararlı olmayan denge durumuna bakarak belirlenebilir. Eğer bir sistemin ilk durumu bir denge noktasına yeterince yakın ise, sistemin durum değişkenlerinin hep o nokta civarında kalması denge noktasının kararlılığıdır. Sistemdeki düzensizlikte gözlemlenen düzen kaos olarak adlandırılır. Diferansiyel denklemde bulunan parametrenin değişimine bağlı olarak oluşan sistemin niteliksel özelliklerinin varyasyonuna da çatalanma denir. Parametre değişimine bağlı olarak yeni denge noktalarının meydana gelmesi veya kararlılıkların değişimi çatalanmaya örnektir.

modelini buldu. Bu çalışmaları ile 1963'te Fizyoloji veya Tıp Nobel Ödülü'nü aldılar. Bu bilim adamları, Plymouth Deniz Biyolojisi Laboratuvarı'nda yaptıkları çalışmalarında mürekkep balığının "dev aksionunu" kullandı. 1960'lı yıllarda Wilfrid Rall'ın dendritik ağacın kablo modelini bulması matematiksel sinirbilimde

kayda değer bir diğer gelişmeydi. Rall ikili kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla, sinir hücresinin zar potansiyelinin yerel iletkenlik değişimine (snaptik girdi) bağlı olarak dendritik dallar boyunca nasıl yayıldığını bulmuştur. Bu örnekler çoğaltılabilir. Fakat dikkatinizi başka bir yöne çekmek istiyorum. Şimdi sıkı durun ve arkınıza yaslanın, çünkü bahsedeceğim sayılar çok ilginç: İnsan vücudundaki bütün sinir liflerinin toplam uzunluğu yaklaşık 768.000 km, bu mesafe Dünyadan Ay'a gidiş geliş uzunluğu. Bu uzunluk, yaklaşık 400.000 km'si çevreye dağılan sinirlerin, 368.000 km'si ise sadece merkezi sinir sistemine ait sinirlerin uzunluğunun toplamı. Toplam sinir hücresi sayısı 10^{11} , bu sayı ise Samanyolu galaksisindeki yıldızların sayısından fazla. Aynı anda bir sinir hücresinden geçen sinyal sayısı 200.000'e yakın. Bu da her an, vücudun her yanından gelen sayısız "bilgi", milyonlarca hücrenin içinden geçerek merkezden çevreye ve çevreden merkeze akıyor demek. Hücrelerin birbirleriyle bilgi alışverişi yaptı-



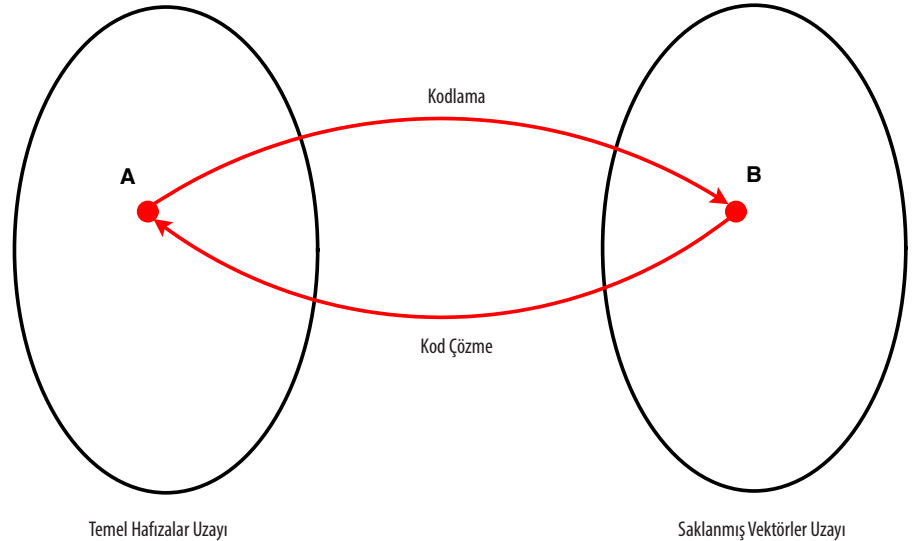
Hopfield Modeli



J. J. Hopfield 1982'de yapay bir sinir ağı modeli tasarlamış, bu modelle "nasıl öğreniriz", "unuttuğumuz bilgileri nasıl geri çağırırız" gibi soruları cevaplamaya çalışmıştır. Hopfield, sinir ağlarını çağrışımlı bellek veya içerik adreslenebilir hafıza olarak tanımlamıştır. Ağın faz uzayındaki kararlı noktalara, temel hafıza veya ağın prototip durumu olarak bakmıştır. Örneğin bir ağın kısmi ama yeterli bilgi içeren bir örüntüsü var ise, bu örüntü faz uzayındaki başlangıç noktası olarak alınabilir. Başlangıç noktası geri çağırılmış hafızayı temsil eden kararlı noktaya yakın olmak şartı ile sistem kendi hafıza durumuna yakınsar. Sonuç olarak Hopfield ağı faz uzayı, sistemin temel hafızalarını temsil eden kararlı denge noktalarından oluşan dinamik bir sistemdir diyebiliriz. Diğer bir nitel özellik ise periyodik çözümlerdir. Sistemin periyodik çözümleri periyodik örüntüyü belirtir ve öğrenme kuramında kullanılır. Belli etkinlikleri ve hareketleri, tekrar ederek öğrendiğimizi unutmayalım. Şunu da eklemekte fayda var: Akademik çalışmalarda diferansiyel denklemlerin diğer nitel özelliklerinin sinir ağ modellerinde kullanıldığını görmek mümkün. Örneğin çatallanma ve kaos.

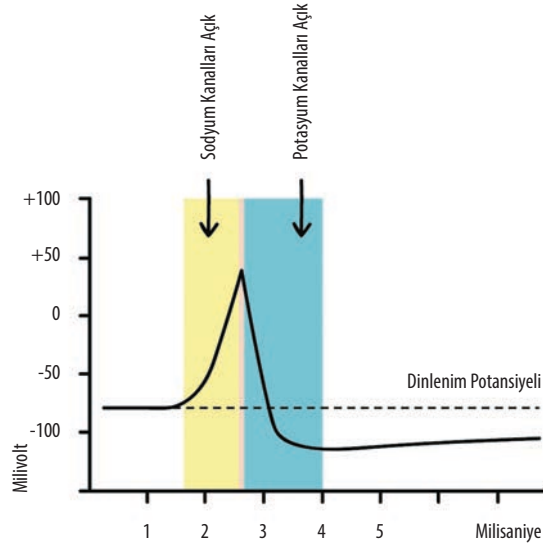
ğı bağlantı ve temas noktalarının yani sinapsların toplam sayısı 100 trilyon. Bütün bu bağlantıların haberleşmek için birbirleriyle oluşturabileceği kombinasyon sayısı ise, evrendeki atomların sayısından daha fazla. Zihinsel bir sürecin başlangıcında etkinleşen hücre sayısı 10 milyon ile 100 milyon arasında, sürecin derinliğine göre bu sayı inanılmayacak kadar artabiliyor. Beynin sağ ve sol tarafı arasındaki bağlantı sayısı 200 milyon. Aksonların toplam uzunluğu 8 milyon km, bu mesafe de Dünyamızın çevresinin uzunluğunun 200 katı. Daha devam edelim mi? Burada noktalayalım. Beynimizin yapısı gerçekten de çok karmaşık. Acaba insanlığı bugün bu büyük bulmacayı çözebilecek mi?

Tekrar asıl konumuza dönecek olursak yukarıda bahsettiğimiz gelişmeler ve beynimizin yapısının hâlâ tam olarak çözülememiş olması, matematikçilerin de ilgisini bu alana yöneltmiştir. Peki, matematik sinirbilimde ne yapar? Daha net soralım: Sinir hücrelerinin işlevlerini matematiğin dili ile nasıl anlayabiliriz? Bu soruyu matematiğin birçok farklı dalıyla cevaplamak mümkün, fakat biz burada matematiğin en önemli dallarından olan dinamik sistemler yardımıyla cevap verelim. Bu alanda çalışma yapanlar yeni modeller geliştiriyor. Örneğin araştırmacılar elektronik devreler yardımıyla insan beyninin yapısı ile birçok benzerlik gösteren yapay sinir ağları ve hücre işlevleri tasarlıyor.

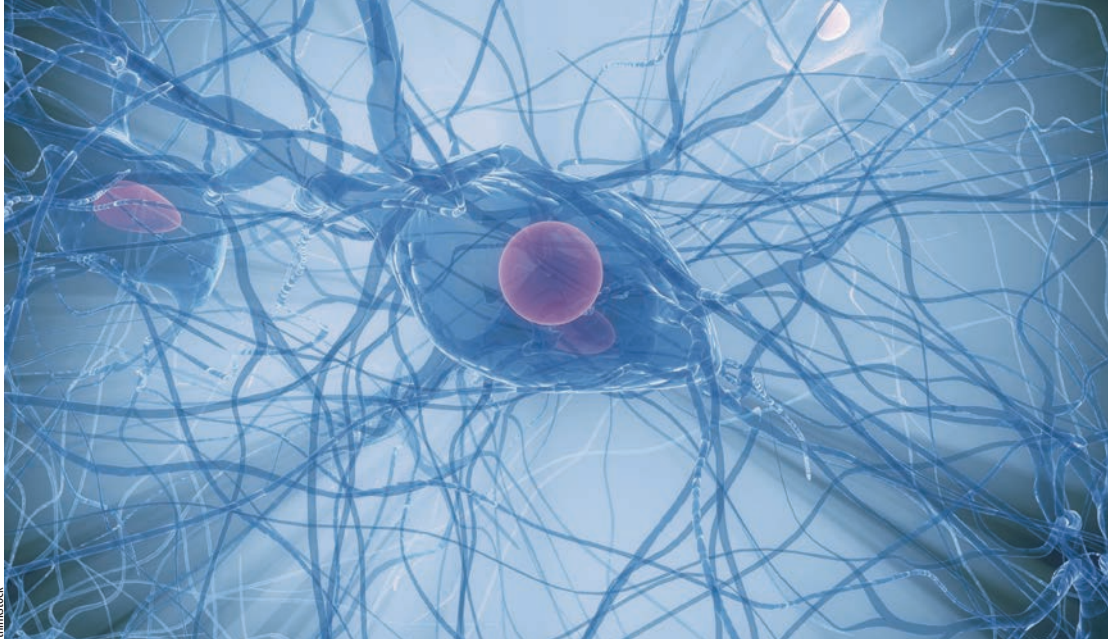


Aksiyon Potansiyeli

Bir sinir hücresinde oluşan sinyalin diğerine iletilmesi için aksion boyunca ilerlemesi gerekir. Sinir hücreleri bu işlevi aksiyon potansiyeli olarak adlandırılan elektriksiz itmelerle yerine getirir. Bu itmeler, bir ip boyunca ilerleyen bir dalga gibi sinir lifleri boyunca ilerler. Bu, aksion zarındaki elektrikle yüklü iyonların geçmesine izin vermek üzere açılıp kapanabilen sodyum (Na^+) ve potasyum (K^+) iyon kanalları sayesinde gerçekleşir.



2011'de Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Bilimsel Hesaplama alanında doktoraasını tamamlayan Dr. Yılmaz, aynı yıl ODTÜ Prof. Dr. Mustafa N. Parlar Eğitim ve Araştırma Vakfı tarafından verilen 2010-2011 Öğretim yılı, ODTÜ Yılın Tezi Ödülü'nü aldı. Temel ilgi alanları matematiksel sinirbilimi ve süreksizlik içeren diferansiyel denklemler. Bu konularda birçok makalesi olan Dr. Yılmaz, Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümü'nde ve bağlantılı öğretim üyesi olarak ODTÜ Uygulamalı Matematik Enstitüsü'nde çalışmalarına devam ediyor.



thinkstock

Bu ağlar örüntülerin sınıflandırılması, çağrışimli bellekler, görüntü işleme, sinyal işleme ve optimizasyon problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanıldıkları için inceleniyor. Bu uygulamalar ağların dinamik davranışlarına bağlı. Yapılan çalışmalara bakıldığında birçok sinir ağı modeli görmek mümkün. Tüm çalışmaların amacı daha gerçekçi bir sinir ağı modeli geliştirmek, geliştirilen modelin biyolojik sinir hücrelerinin yapısına benzerliğinin artmasını sağlamak. Bu alanda çalışan matematiksel sinirbilimciler genelde sinir ağları modelinin dinamik davranışlarını, örneğin denge noktasının kararlılığını ve periyodik çözümlerini bulmaya çalışır.

Yazımızın başında da bahsettiğimiz gibi matematik birçok bilim dalının anası. Matematiği etrafımızda olan biten her şeyi anlamak için kullanmak mümkün. Acaba ileride matematiksel psikoloji, matematiksel sosyoloji veya matematiksel hukuk diye yeni bilim dalları olur mu, ne dersiniz? Bence mümkün, çünkü matematik bu!

Kaynaklar

Hopfield, J. J., "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proceedings of the National Academy of Sciences Biology*, Cilt 71, s. 2554-2558, 1982.
Haykin, S., *Neural networks: a comprehensive foundations*, (2. Basım), Tsinghua Press, 2001.

Coombes, S., "Mathematical Neuroscience", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Cilt 239, s. 475-476, 2010.

Yılmaz, E., "Neural networks with piecewise constant argument and impact activations", Doktora Tezi, Uygulamalı Matematik Enstitüsü, ODTÜ, 2011.