

Eğlence Havuzu

OLASILIK

Ateş ile Güneş hilesiz iki zar ile bir oyun oynuyor. İki zar aynı anda atılıyor. Zarların toplamı 12 gelirse oyun bitiyor ve Ateş oyunu kazanıyor. Zarların toplamı art arda iki kez 7 gelirse yine oyun bitiyor ve Güneş oyunu kazanıyor. Oyunculardan biri oyunu kazanana kadar zarlar atılmaya devam ediliyor. Sizce Ateş'in oyunu kazanma olasılığı nedir?



KARINCALAR

Düzlemde bir dikdörtgenin üç köşesinde birer karınca var. Dikdörtgenin merkezinde buluşmak isteyen bu üç karıncadan önce birincisi diğer ikisinin bulunduğu noktalardan geçen doğruya paralel olarak hareket ederek, düzlemde herhangi bir noktaya gider. Sonra ikinci karınca diğer ikisinin bulunduğu noktalardan geçen doğruya paralel olarak hareket ederek, düzlemde herhangi bir noktaya gider. Sonra üçüncü karınca benzer şekilde hareket eder. Karıncalar bu şekilde sırayla hareket etmeye devam eder. Karıncaların buluşması mümkün mü?

TABAKLAR

Masada yan yana dizilmiş altı tabak var. Güneş iki eline birer tabak alıp her ikisini de eski yerlerinin ya birer sağına ya da birer soluna koyuyor. Eğer orada zaten bir tabak varsa yenisini diğerinin üstüne yerleştiriyor. Güneş bu şekilde tüm tabakları tek bir sütun halinde toplayabilir mi?

KAREDEKİ BÖLGELER

Bir karenin her kenarı üzerinde n tane nokta işaretlenmekte ve karşılıklı kenarlar üzerindeki noktalar birbirlerine doğru parçalarıyla birleştirilmektedir. Çizilen $2n^2$ tane doğru parçasından herhangi 3 tanesi aynı noktadan geçmemektedir. Bu durumda kare toplam kaç parçaya bölünmüş olur?

CANKURTARAN EKİBİ

Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygi.



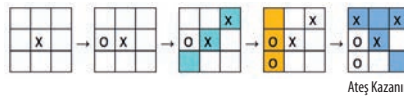
Serbest Stil

TİK-TAK-TO

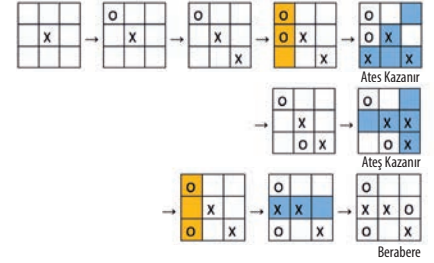
Tik-Tak-To oyunu iki kişi ile 3×3 'lük bir tahta üzerinde oynanır. İki oyuncu sırayla hamle yapar. İlk oyuncu tahtadaki boş karelerden birine X yazar. Aynı şekilde, ikinci oyuncu da bir kare seçerek O yazar. Bir sıradaki, sütundaki ya da köşegen üzerindeki üç karede kendi işaretinin bulunmasını sağlayan ilk oyuncu oyunu kazanır. Tüm kareler dolduktan sonra bu şart sağlanamamışsa oyun berabere biter. İki oyuncu da en akıllı şekilde oynarsa oyunu kim kazanır?

Bu soruyu cevaplandırmak için önce bir kaç tanım yapacağız. Tahtanın merkezindeki kareye "orta", köşelerindeki dört kareye "köşe", diğer dört kareye ise "kenar" diyelim. Ayrıca ilk oyuncu "Ateş", ikinci oyuncu da "Güneş" olsun. Simetriyi göz önüne alırsak, Ateş'in ilk hamlesini yapabileceği üç seçenek (orta, kenar, köşe) vardır.

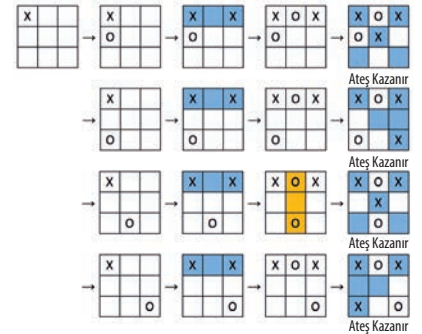
Öncelikle Ateş'in ilk hamlesini ortaya yaptığı durumları inceleyelim. Eğer Güneş kenarlardan birisine (genelliği bozmadan, sol taraftaki kenar olsun) oynarsa, Ateş sağ üstteki köşeye oynar (şekilden takip edebilirsiniz). Bu hamle sonunda Güneş'in oyunu kaybetmemek için tek seçeneği sol alt köşeye oynamaktır. Ancak bu durumda bile Ateş sol üst köşeye oynadığı zaman, Güneş'in yapabileceği bir şey yoktur. Ateş, üst kenara ya da sağ alta oynayarak oyunu kazanır.



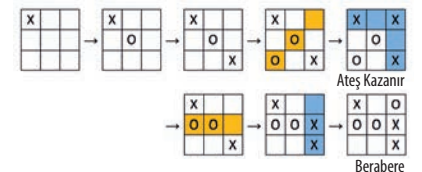
O halde Güneş yanlış bir strateji izlemiştir; kenarlardan birine oynamak yerine köşelerden birine oynamalıdır. Güneş ilk hamlesinde genelliği bozmadan sol üst köşeye oynamış olsun. Ateş'in rakibini en çok zorlayan hamle sağ alt köşeye oynamaktır. Şimdi Güneş kenarlardan birine oynarsa, Ateş şekillerde gösterildiği gibi oynayarak oyunu kazanır. Ancak Güneş köşelerden birisine oynarsa oyun berabere biter.



Ateş sağ alt köşe dışında bir yere oynasa da Güneş en iyi hamleleri yaparsa oyun berabere biter. Bu durumların analizlerini size bırakıyoruz. Sonuç olarak Ateş ilk hamlesini ortaya yaparsa, iki taraf da en iyi şekilde oynarsa oyun berabere biter. İkinci olarak Ateş'in ilk hamlesini köşelerden birine yaptığı durumları inceleyelim. Genelliği bozmadan Ateş ilk hamlesini sol üst köşeye yapmış olsun. Güneş orta dışında bir yere oynarsa oyunu kaybeder. Tüm durumların incelendiği şekle bakarak bunun doğru olduğu rahatlıkla görülebilir.



Güneş ilk hamlesini ortaya yaparsa Ateş'in rakibini en çok zorlayan hamlesi sağ alt köşeye oynamaktır. Güneş bu durumda köşeye oynarsa kaybeder, ancak kenara oynarsa oyun berabere biter. Durum incelemeleri yine şekillerden görülebilir. Yani Ateş ilk hamlesini köşelerden birisine yaparsa, iki taraf da en iyi şekilde oynarsa oyun berabere biter. Ateş'in ilk hamlesini kenara yapması durumunda da oyun berabere biter. Bu durumun analizlerini de size bırakıyoruz. Sonuç olarak iki taraf da en iyi şekilde oynarsa Tik-Tak-To oyunu beraberlikle sonuçlanır.



Olimpik Havuz

EN BÜYÜK DEĞER

Alanı A , çevresi \hat{C} , çevrel çemberinin yarıçapı R olan bir üçgende $\frac{A \cdot \hat{C}}{R^3}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

ALT KÜME

$\{1, 2, 3, \dots, 2013\}$ kümesinin bir M alt kümesi şu şartı sağlıyor:

" M kümesinden seçilen herhangi üç eleman arasında, biri diğerini bölen iki eleman bulunabilir."

Buna göre, M kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?

GEÇEN SAYININ ÇÖZÜMLERİ

Eğlence Havuzu

SIFIR TOPLAMLI OYUN

1	2	-3
-4	0	4
3	-2	-1

Kümedeki sayıları 3×3 'lük bir tahtaya yerleştirilim. Bu kare sihirli bir karedir; yani tüm satır, sütun ve köşegenlerdeki sayıların toplamı sıfırdır. Oyuncular ellerindeki kağıtlardaki sayıların toplamını sıfır yapabilirlerse, tahtanın bir satır, sütun ya da köşegenindeki sayıları işaretlemişler demektir. Aslında bu oyun bir Tık-Tak-To oyunudur ve iki taraf da en iyi şekilde oynarsa oyun beraberlikle biter.

(Doğru cevap gönderen: Yusuf Emre KÖROĞLU)

KART ŞİFRELERİ

Çağdaş'ın küçük şifresinin onluk tabanda yazılımı $abcd$ olsun. $dcba = 4abcd$ eşitliğinden a 'nın çift ve $a \leq 2$ olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla $a = 2$ ve $4d$ 'nin son basamağı 2 ve $d \geq 4$ olduğundan $d = 8$ olur. $1000a + 100b + 10c + d = 4(1000a + 100b + 10c + d)$ eşitliğinde $a = 2, d = 8$ yazarsak $2b = 13c + 1$ buradan da $b = 7, c = 1$ elde edilir. Sonuç olarak Çağdaş'ın şifreleri 8712 ve 2178'dir.

(Doğru cevap gönderenler: Hasan Uğur BERKTÜRK, Enes GÖNÜLTAŞ, Yusuf Emre KÖROĞLU, Merve KUBAT, Sena OZANSOY, Ayşe TERCAN)

ŞANSLI BİLETLER

Biletin seri numarasının onluk tabanda yazılımı $abcd$ olsun. $a + b = c + d$ durumlarının sayısını bulmak için tabloyu kullanalım:

$a+b$	$c+d$	Durum sayısı
0	0	1^2
1	1	2^2
2	2	3^2
...
8	8	9^2
9	9	10^2
10	10	9^2
...
17	17	2^2
18	18	1^2

Dört rakamdan oluşan Şanslı Biletlerin sayısı $1^2 + 2^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 9^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = 670$ olur.

Şimdi altı rakamdan oluşan Şanslı Biletlerin sayısını benzer şekilde hesaplayalım.

$a + b + c = k$ durumu ile $a + b + c = 27 - k$ durumlarının sayısı aynı olduğundan kolaylık olması açısından durumların yarısını inceleyip simetri nedeniyle ikiyle çarpacağız:

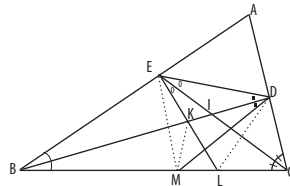
$a+b+c$	$d+e+f$	Durum sayısı
0	0	$C(2,2)^2 = 1^2$
1	1	$C(3,2)^2 = 3^2$
2	2	$C(4,2)^2 = 6^2$
...
9	9	$C(11,2)^2 = 55^2$
10	10	$[C(12,2) - C(2,2)]^2 = 63^2$
11	11	$[C(13,2) - 3C(3,2)]^2 = 69^2$
12	12	$[C(14,2) - 3C(4,2)]^2 = 73^2$
13	13	$[C(15,2) - 3C(5,2)]^2 = 75^2$

Altı rakamdan oluşan Şanslı Biletlerin sayısı $2 \times (1^2 + 3^2 + 6^2 + \dots + 55^2 + 63 + 69^2 + 73^2 + 75^2) = 55252$ olur.

Son olarak abc ile başlayan Şanslı Biletlerin sayısı abc 'nin herhangi bir permütasyonu ile başlayan Şanslı Biletlerin sayısına eşittir. Dolayısıyla bütün altı rakamlı Şanslı Biletlerin üzerinde yazan sayıların toplamı 111111 ve 13|111111 olduğundan 13 ile bölünür.

Olimpik Havuz

Üçgenin açıları (Çözüm: Eyüp AMANVERMEZ)

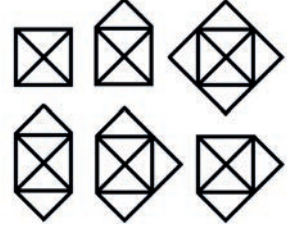


I , ABC üçgeninin açıortaylarının kesişim noktası ise $m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + \frac{m(A)}{2}$ 'dir. Buradan $m(A) = 96^\circ$ bulunur. L, D noktasının CE doğrusuna ve M, E noktasının BD doğrusuna göre simetrik noktaları

Kum Havuzu

EL KALDIRMADAN ÇİZİM

Yandaki şekillerden hangilerini eliniz kaldırmadan ve geçtiğiniz yerden bir daha geçmeden çizebilirsiniz? Bu koşullara ek olarak başladığınız noktaya dönmek koşuluyla hangi şekilleri çizebilirsiniz?



DOMİNO TAŞLARI

8×8 büyüklüğünde bir satranç tahtasının sol üst ve sağ altındaki birer kare kesilip atılmıştır. Geri kalan 62 kareyi 2×1 büyüklüğünde 31 domino taşı ile kapayabilir misiniz?

olsun. BD ve CE açıortaylar olduğu için L ve M noktaları BC kenarı üzerindedir. Ayrıca MDE ve CDL üçgenlerinin ikizkenar olduğu kolayca görülür. EL ve BD doğruları K noktasında kesişsin. Verilen açıları yerine yerleştirdiğimizde DM nin KDL açısını ortalağı görülür. Ayrıca $m(\widehat{MEK}) = 30^\circ$ ve dolayısıyla $m(\widehat{MKB}) = 60^\circ$ bulunur. Buradan KM nin DKL açısının dış açıortayı olduğu çıkar. Böylece M nin KLD üçgeninin bir dış teğet çember merkezi olduğu bulunur. Dolayısıyla LM de KLD açısının dış açıortayıdır. Buradan $m(\widehat{DLC}) = 54^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 72^\circ$ bulunur. Benzer şekilde $m(\widehat{B}) = 12^\circ$ bulunur.

Bir artan dizi

$a_1 = c$ olsun. Buna göre $a_2 = a_1 + 1 = c + 1$ ve $a_4 = a_2 + 2 = c + 3$ olur. Dizi artan olduğu için $a_3 = c + 3$ olmalıdır. Şimdi her $n \geq 1$ için $a_n = c + n - 1$ olduğunu gösterelim. k bir tam sayı olmak üzere, $n = 2^k$ şeklindeki sayılar için doğru olduğu tümevarımla kolayca görülür. Eğer $2^k < n < 2^{k+1}$ ise

$$c + 2^k - 1 = a_{2^k} < a_{2^k+1} < \dots < a_n < \dots < a_{2^{k+1}} = c + 2^{k+1} - 1$$

olur.

Bu ise ancak $a_n = c + n - 1$ olduğunda mümkündür. Son olarak $c = 1$ olduğunu gösterelim. $c \geq 2$ olduğunu varsayalım. $p < q$, c den büyük iki ardışık asal sayı olsun. $a_{q-c+1} = c + q - c = q$ olduğundan $q - c + 1$ asaldır. Ayrıca $q - c + 1 \leq p$ dir. Dolayısıyla, c den büyük her ardışık $p < q$ asal sayıları için $q - p \leq c - 1$ dir. $(c + 1)! + 2, (c + 1)! + 3, \dots, (c + 1)! + c + 1$ sayılarının hepsi bileşik sayıdır, dolayısıyla $p < (c + 1)! + 2 < (c + 1)! + c + 1 < q$ şeklindeki p ve q ardışık asal sayıları için $q - p > c - 1$ olur.

Fakat bu az önce bulduğumuz sonuçla çelişir. Buradan $c = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_n = n$ bulunur.