

Huzursuz Birlik

Sezgisiz matematik olmaz. Ama salt sezgilerle de matematik olmaz. Matematik yapacaksak, matematik sezgilerimizi geliştireceğiz. Bu şart. Problem çözmek, matematik sezgilerimizin gelişmesi için en iyi yol. Einstein'ın dediği gibi: "Sezgi ancak hazır kafalara gelir"!

Ama, sezgilerimiz başımıza dert de olabilir. Örnek mi istiyorsunuz; bakın şunlara:

"Her sayının 0'ncı üssü 1 olduğuna göre $0^0=1$ olmaz mı?"
 "0,999....=1 olamaz; biraz ters değil mi?"
 "n! 1'den n'e kadar sayıların çarpımı olduğuna göre 0! neden 0 değil?"
 "Her sayının kendisine bölümü 1 olduğuna göre 0/0 neden 1 değil?"
 " ∞^0 neden 1 değil?"

Saymakla bitmez, sezgilerinizin bize doğruymuş hissi verdiği birçok durum var.

İşte, size bu tür yanılgılara birkaç örnek daha:

Belki karşılaşmışsınızdır, hoş bir problem vardır: Ekvatorun çevresine bir ip saralım. Biliyoruz ki bu ip 40.000 km uzunluğunda olacaktır. Şimdi ipe bir metre ip ekleyelim. 40.000 km + 1 m uzunluğundaki ip ekvatorun her noktasında eşit şekilde yükselmiş olacaktır. Acaba, bu ipin altından bir karınca geçebilir mi?

Bir başka ünlü hikaye de şöyledir: Bir zamanlar Pers Kralı, Hint Kralı'na armağan edilmek üzere bir oyun kurgulanmasını istemiş. Bugün satranç diye bildiğimiz oyunu kurgulayan bilgin, oyunu Pers Kralı'na sunduğunda çok memnun olan kral, "Dile benden, ne dilerse" demiş. Bilgin kendisine uzatılan hazine dairesinin anahtarını

elinin tersiyle itip, kraldan satranç tahtasının sol alt köşesindeki kareye bir buğday tanesi koymasını ve sonra her kareye bir önceki karenin iki katı buğday tanesi koymasını ve bu şekilde 64. kareye kadar gitmesini istemiş. "Bana bu kadar buğday verseniz yeter." demiş. Zenginliğinden gurur duyan kral, tebessümle, bilginin alçak gönüllülüğünü övüp, vezirine "Dileği, yerine getirin" diye emir vermiş.

İş matematiğe geldiğinde, sezgilerimiz son derece önemli kuşkusuz. Birçok matematik buluşu ya da tezi sezgiye dayanarak üretiliyor. Ama yukarıdaki iki örneğe bakın. İlkinde, örneğimiz ekvator olmasın da bir futbol topu olsun. Aynı şeyi yapalım.

Acaba bu kez karınca yükseltilmiş ipin altından geçebilir mi? İlk bakışta ters gelse de sonuç değişmiyor. Her iki halde de dairenin çevresini bulmada kullandığımız formüle baş vurduğumuzda, çevre 1 m büyürse, çapın $1/\pi$ kadar büyüyeceğini geometriden biliyoruz. Hesabı yaparsak, ipin yerden yaklaşık 15,9 cm yukarıda olacağını hemen hesaplayabiliriz.

İkinci örnekteyse, katlana katlana giden buğday tanelerini, satranç tahtasının son karesinde tam 2^{63} e ulaştığını görürüz. Acaba satranç tahtasının üzerinde kaç buğday tanesi var?

Satranç tahtasındaki buğday taneleri = $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{63} = 2^{64}$

Tarım uzmanları 1000 buğday tanesinin yaklaşık 31g geldiğini söylüyor. Sonuç şaşırtıcı. $2^{64} \times 31/1000$ g. Bu 570 milyar tondan daha çok buğdaya karşılık geliyor. Bir karşılaştırma yapabilmek için 2008 dünya buğday üretiminin 645 milyon ton olarak beklendiğini göz önüne getirelim. Ne dersiniz, kralın sezgisi başına büyük dert açmamış mı? Tam 885 yıl boyunca dünyanın bütün buğdayını bilgine vermesi lazım. Ömür mü yeter!

Sezgilerin yanılması üzerine bir hoş problem daha: Bir parti veriyorsunuz, acaba kaç kişi davet etmelisiniz ki gelenlerin en az ikisinin yaş gününün aynı olması olasılığı %50'den büyük olsun. Yıl 365 gün ve yılın her gününde doğma olasılığı eşit olsun. Doğum günü paradoksu olarak bilinen bu problemin yanıtı 23. Sonuç sürpriz! Ama matematik sonucu veriyor.

Bu söylediklerimden sezgilerimizin karşıtı olduğum sonucuna varmayın. Yalnızca sezgilerimize güvenerek matematik yapamayız. Bunu aklımızda tutalım. Ancak sezgilerimiz olmazsa da matematik yapmamız zor doğrusu.

1445 sporcunun yarıştığı bir tenis turnuvası olsun. Kuralımıza göre, tümüyle elemeli olan turnuvada, her turda eşleşmelerde maçı kaybeden eleniyor ve her turda eğer oyuncu sayısı tekse, kurayla seçilen bir kişi maç yapmadan tur atlıyor. Acaba turnuvada kaç maç yapılacaktır?

Bu problemi çözelim: İlk turda 722 maç yapılacak. Bir kişi kurayla tur atlayacak. İkinci tur ve sonrasında da benzer şekilde gideceğiz. 361 kişi tur atlayacak, bir de maç yapmadan gelen 362. Ve böyle devam edeceğiz. Her turda kalan oyuncuların çift mi tek mi olduğuna bakarak kura çekilecek mi çekilmeyecek mi adım adım irdelleyecek ve sonuca ulaşacağız. Bu bir yol. Ama bir de şöyle düşünelim: Her oyuncu ancak bir kere maç kaybedebilir. Maçı kaybettiği anda elenir. O halde en sonda 1 kişi şampiyon olacağına göre, 1444 tane kişi birer maç kaybetmiş olacaktır. O nedenle maç sayısı 1444 olmalıdır. İşte bu sezgi. Problemin kolay ve zarif bir çözümünün nerede yattığını sezme. Hedefe ulaşmak için, yolu duyumsama, ona göre çözüm için ilerleme. Eğlencelik olsun diye size bir soru, bakalım çözümü sezebilecek misiniz: Bir dağcı, sabah erken tırmanmaya başladığı dağın doruğuna ancak akşam ulaşıyor. Ertesi sabah gene tam aynı saatte, tam aynı yolu takip ederek geri iniyor. Bu sefer yol yarım gün sürüyor. Dağcının, çıkarken de inerken de tam aynı saatte aynı noktada olacağı bir noktanın bulunacağını gösteriniz!

Tatil başladı, matematikle sırf eğlence olsun diye ilgilenmenin tam zamanı!