"Pi" ile Bir Gezinti

Sen Neymişsin Pi ?

Pi…Üstün, irrasyonel, ele avuca sığmayan bir sayı. Eh, ne de olsa 1995 yılında Tokyo Üniversitesi'nden Yasumasa Kanada'nın hesapladığı 6 442 450 000 basamağıyla pek ufak tefek olduğu iddia edilemez. Bunların yanısıra oldukça etkileyici bir özgeçmişi de var *pi* nin. Hem de yakın arkadaşları e ve $\sqrt{2}$ gibi…

Pi nin bu ilginç geçmişine göz atmadan önce, gelin isterseniz önce onun hayran kitlesiyle tanışalım. Aslında onlara hayran kitlesi demek de haksızlık olur, çünkü onlar *pi* nin yılmaz ve sadık takipçileri. Kimler mi? İşte Amerika'dan birkaç örnek:

-*Pi* nin 1000 Basamağını Ezberleyenler Kulübü

-*Pi* nin 100 Basamağını Ezberleyenler Kulübü (Tabii, onlar amatör (?!) sayılıyor)

-*Pi* Kulübü (Geriye kalanlar için)

-*Pi* nin Arkadaşları ve eğer Alman vatandaşıysanız: Klub der Freunde der Zahl Pi

-*Pi* nin Diğer Ülkelerdeki Arkadaşları (Bu da bizler için)

Tüm bu kulüplerin yanında The San Fransisco Exploratorium -ki aynı zamanda dünyanın en ilginç müzelerinden birisi- her yıl 14 Mart'ta Ulusal Pi Günü'nü kutlamaya başlamış. Yani günlerden 3,14 olacak şekilde… Ne diyelim, darısı diğer sayıların başına!

Kısa Bir Tanışma

Gelin artık, hakkında bunca şey yazdığımız *pi* ile (yani π ile) tanışmamıza, önce onun tanımıyla başlayalım. Yarıçapı 1 olan bir daire, diğer bir deyişle birim daire, *pi* kadar bir alan kaplar. Aynı zamanda, bu *pi* nin de tanımını oluşturur; yani birim dairenin kapladığı alan *pi* dir. Ancak *pi* bununla da yetinmez. Dairemizin yarıçapı 2 kat büyüdüğünde, çevre de 2 kat büyür. Yarıçap 2 değil de, 3 kat büyür ya da 5 kat küçülürse, çevre de yine aynı oranda büyür ya da küçülür. Kısacası çevrenin çapa oranı daireden daireye değişmez ve hep sabit kalır. İşte aynı zamanda bu sabit oranın da kendisidir *pi*, diğer bir deyişle

$$\pi = \frac{\text{çevre}}{\text{çap}} \text{ tır.}$$

Elbette, insanlar yalnızca *pi* nin sabit bir oran olduğunu bulmakla yetinmemiş, onun değerini saptamak için de çaba göstermişlerdir. İsterseniz, biz de *pi* hakkında tüm bildiklerimizi unutalım ve onu yeniden keşfetmeye çalışalım. Öncelikle bir ip, iki kalem ve büyükçe bir kâğıt bulmamız gerekli… İpi bu iki kaleme bağlayalım. Bir kalemi kâğıdın ortasına gelecek şekilde tutarken, öbürüyle de ipi gergin tutarak bir çember çizelim (Dikkat!.. Eğer ortada tuttuğunuz kalemi sarsar ya da ipi germezseniz, ne yazık ki ortaya yeni bir pi değeri çıkarmış olursunuz). Şimdi kâğıdımızın ortasına kalemimizi koyarak oluşturduğumuz noktaya O noktası diyelim. Çizdiğimiz çember üzerinde herhangi bir noktaya da A noktası diyelim. Eğer daha uzunca bir ip bulur ve bu ipi hem A hem de O noktasından geçecek şekilde çemberimizin üstünde gerersek çapımızı

bulmuş oluruz. Bunun için ipimizi çemberle kesiştiği noktalardan kesmemiz yeterlidir. Şimdi elimizde kalan bu bir çap boyundaki ipi, A noktasından itibaren çemberimizle çakıştıralım ve ipin diğer ucunda kalan noktaya da B diyelim. Böylelikle bir AB yayı elde etmiş oluruz. Bu sefer B noktasından itibaren ipimizi çakıştırıp, geldiğimiz diğer uca C diyelim. Aynı işlemi bu sefer de C noktasından itibaren çakıştırarak tekrarlayalım ve diğer uca da D noktası diyelim. Şimdi yaptığımız bu işlemleri sayacak olursak ipimizi çemberle üç ayrı noktadan itibaren çakıştırdığımızı görürüz. Ancak çemberimiz üzerinde, A noktasına tekrar ulaşmak için geriye küçük bir AD yayı kalmıştır. Şimdi daha kısa bir ip bulup, bu ipi AD yayıyla çakıştırmamız gerekir. İşte bu ipi A ve D noktalarından kesersek AD yayının uzunluğunu bulmuş oluruz. Eğer bu AD yayı uzunluğundaki kısa ipimizi, bir çap boyundaki ipimizle karşılaştırırsak görürüz ki; bir çap uzunluğu elde etmek için 7 AD ile 8 AD yayı uzunluğu arasında bir uzunluk gerekmektedir. Yani A noktasından başlayıp çember üzerinde aynı noktaya ulaşmak için toplam $3\frac{1}{7}$ ile $3\frac{1}{8}$ arasında bir oranda ipimizi çemberimizle çakıştırmamız gerekir. Bu da demektir ki çevrenin çapa oranı olan *pi* sayımız $3\frac{1}{7}$ ile $3\frac{1}{8}$ arasındadır. Elbette bu yeterince hassas bir ölçüm sayılmaz. Ancak eski Mısırlılar'ın ya da Arşimet'in zamanında ellerindeki olanakların tüm bunlardan daha iyi olduğunu söylememiz de olanaksız. Çünkü aslında bizim yaptığımız da, Mısırlılar'ın Nil Nehri kıyısında ıslak kumsalın üstünde bir ip ve dal parçaları ya da sopalarla yaptıklarından farklı değil. Şu halde, biz de aynı eski Mısırlılar'ın bulduğu üzere *pi* yi yaklaşık olarak hesaplamış bulunuyoruz. Eh, ne de olsa "tarih tekerrürden ibarettir".

Şimdi bu kısa tanışmamıza noktayı koymadan önce, isterseniz araya bir de soru sıkıştıralım:

Orta Çağ'da karekök için sıkça kullanılan yaklaşık bir değer vardı:

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a+1}$$

$n=10=3^2+1$ olarak alırsak, eminim ki $\sqrt{10}$ un *pi* yerine neden sıkça kullanıldığını bulabilirsiniz. (Kolay, değil mi?)

Arşimet'ten Viète'ye *Pi* nin Serüveni

Pi nin yaklaşık değerlerine çok eski yazılı metinlerde rastlamak mümkündür. Bunun için M.Ö. 1800'lere uzanıp, Ahmes'in yazdığı bir Mısır papirüsüne göz atmamız yeterli olacaktır. Gerçi, papirüse atılan başlık "Indiana Jones" filmlerinin esrarengiz havasını yansıtıyor, çünkü bu papirüsün üstünde "*Tüm Karanlık Şeylerin Bilgisini Elde Etmek İçin Talimatlar*" yazıyor. Ama altında dairenin alan formülü gibi hiç de ürkütücü olmayan talimatlar mevcut. Formül şu: Çapın 8/9'unu hesaplayıp, bunun karesini almak… Eğer yarıçapı 1 olarak seçersek, çap 2 ve alan da π kadar olacağından (tanımdan da hatırlayacağınız gibi), bu bize

$$\pi = \left(2 \times \frac{8}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$$

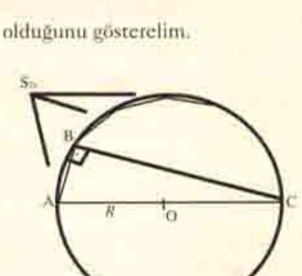
değerini verecektir. Bu da 3,1604….. demektir ki, *pi* ye oldukça yakın bir değerdir.

Ancak *pi* yi hesaplamak için ilk bilimsel teşebbüsün Arşimet tarafından M.Ö. 240'larda gerçekleştirildiğini görüyoruz. Gelin, birlikte onun izlediği yolu anlamaya çalışalım: Önce olayı basitleştirmek için birim çapa sahip bir daire seçelim. Şimdi dairemizin çevresi (çevre uzunluğu), düzgün bir kirişler çokgeninin çevresi ile düzgün bir teğetler çokgeninin çevresi arasında bulunmaktadır. Düzgün kirişler ve teğetler altıgeninin çevresini hesaplamak kolay olduğundan bu çokgenleri seçersek *pi* için alt ve üst sınırlarımızı belirlemiş oluruz. Diyelim ki, şu anda elimizde, verilmiş olan düzgün kirişler ve teğetler çokgenlerinin çevrelerinden nasıl verilenlerin iki katı kadar kenara sahip düzgün kirişler ve teğetler çokgenlerinin çevrelerini hesaplayabileceğimizi gösteren formüller olsun. (Ne uzun cümle kurdum ama! Kaldı ki, birkaç satır aşağıya bakarsanız görebileceğiniz gibi bu formülleri sizler de elde edeceksiniz. Artık mutlusunuzdur!..) Bu işlemi ardarda uygulayarak, düzgün kirişler ve teğetler altıgeninden başlamak üzere, 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün kirişler ve teğetler çokgenlerinin çevrelerini hesaplayabilir ve *pi* için daha yakın alt ve üst sınırları belirleyebiliriz. İşte böylelikle Arşimet *pi* nin 223/71 ile 22/7 arasında olduğunu bulmuş ya da iki ondalık basamakla *pi* nin 3,14'ü verdiğini görmüştür. Bu çalışma Arşimet'in *"Bir Dairenin Ölçümü"* adlı eserinde yer almaktadır ve *pi* yi bu şekilde hesaplama yöntemi de klasik metod olarak bilinmektedir. Şimdi verdiğimiz sözü tutalım ve bahsedilen formülleri soruya dökelim:

Eğer s_k, R yarıçaplı dairenin içindeki k kenarlı düzgün bir kirişler çokgeninin bir kenarını temsil ediyorsa;

$$s_{2n}=\left\{2R^2-R\cdot(4R^2-s_n^2)^{1/2}\right\}^{1/2}$$

olduğunu gösterelim.



Elbette, soruyu çizerek çözmek çok daha kolay olacaktır. Yukarıda dairemizin içine çizdiğimiz $2n$ kenarlı düzgün bir kirişler çokgeninden yalnızca AB kenarını ele alalım. ABC açısı çapı gören çevre açı olduğundan 90°olur. $2n$ kenarlı düzgün çokgenimiz, dairemizi π/n lik eşit yay parçalarına bölerken, onu gören θ çevre açısı da $\pi/2n$ değerini alır. Bu durumda kolayca görüleceği üzere

$$\sin\theta=\frac{s_{2n}}{2R}$$

olur. Yine eğer dairemiz içine n kenarlı düzgün kirişler çokgeni yerleştirirsek bu durumda da

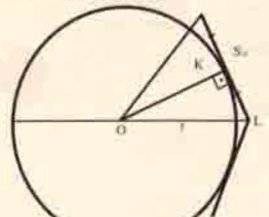
$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{s_{2n}}{2R}$$

elde edeceğimiz açıktır. şimdi de $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ eşitliğinden $\cos\theta$'yı çekersek $\cos\theta=s_n/2s_{2n}$ olur. Ardından da eğer $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ eşitliğini kullanırsak, sorudaki s_{2n} eşitliğine rahatça ulaşırız.

Bu kez aynı soruyu teğetler çokgenine uyarlayalım. Eğer S_k, r yarıçaplı dairenin dışındaki k kenarlı düzgün bir teğetler çokgeninin bir kenarını temsil ediyorsa;

$$S_{2n}=\frac{2rS_n}{\left\{2r+(4r^2+S_n^2)^{1/2}\right\}}$$

olduğunu gösterelim.



Bu sefer de dairemizin dışına çizdiğimiz $2n$ kenarlı düzgün teğetler çokgeninin bir kenarını ele alalım. Bu kenar K noktasında dairemize teğet olurken aynı zamanda tam bu noktada hem kenara merkezden çizilen doğrularla oluşan yay parçası hem de kendisi iki eşit parçaya ayrılır (Bunu rahatça gösterebilirsiniz). Dolayısıyla KL doğru parçasının uzunluğu $S_{2n}/2$'ye eşit olurken, $2n$ kenarlı düzgün çokgen sayesinde π/n'lik yay parçalarına ayrılan dairemizle beraber θ da $\pi/2n$ değerini alır. Yarıçap da her zaman bir doğruyu teğet olduğu noktada dik kestiğinden OKL açısı 90° olur. Bu durumda da $\tan\theta=S_{2n}/2r$ olacaktır. Yine eğer çizilen teğetler çokgeninin n kenarlı olması durumunda aynı işlemler tekrarlanırsa, $\tan 2\theta=S_{2n}/2r$ elde edilecektir. Bundan sonra da

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

eşitliğini kullanırsak, kolayca ulaşabileceğimiz sonuç soruda verilen S_{2n} eşitliği olacaktır.

Ve son olarak Arşimet'in kullandığı esas formüllere geldi sıra... Eğer p_k ve P_k, sırasıyla R yarıçaplı bir dairede k kenarlı düzgün kirişler ve teğetler çokgenlerinin çevre uzunluklarını temsil ediyorsa;

$$P_{2n}=\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n},$$

$$p_{2n}=(p_nP_{2n})^{1/2}$$

olduğunu gösterelim.

Gelin, ilk olarak $p_n=2nR\sin\pi/n$ ile $P_n=2nR\tan\pi/n$ olduğunu göstermeye çalışalım. Elimizdeki çokgenler düzgün olduğundan, $P_n=nS_n$ ve $p_n=ns_n$ olmalıdır. Bu durumda ilk soruda hesapladığımız $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ değerlerini, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ eşitliğinde yerine koyarsak, elimize geçen $\sin\pi/n=S_n/2r$ olur. Aynı zamanda $\tan\pi/n=S_n/2r$ daha önce ikinci soruda elde edilmiştir. Böylelikle bu değerleri yukarıda yazılı olan p_n ve P_n eşitliklerinde yerine koyarsak, daha önce belirttiğimiz gibi ns_n ve nS_n değerlerine sahip oluruz. Son olarak da bu p_n ve P_n eşitliklerini soruda yazılı eşitliklerde yerine koyar ve yapılan sadeleştirmelerde de ilk soruda hesapladığımız $\sin\theta$ ve $\cos\theta$'yı kullanırsak, $p_{2n}=2ns_{2n}$ ile $P_n=2nS_n$ sonuçlarını rahatlıkla elde ederiz.

Umarım artık tatmin olmuşsunuzdur. şimdi *pi* ile olan gezintimize devam edelim ve başka kimler *pi* nin değerini hesaplamak için gecesini gündüzüne katmış, onları görelim. Arşimet'ten sonra ilk uğradığımız bilim adamı İskenderiyeli *Cladius Ptolemy* ve tarih MS 150'ler. Ptolemy, ünlü kitabı *Syntaxis Mathematica*'da *pi* yi 377/120 ya da 3,1416 olarak veriyor. Ardından uzak diyarlara gidiyoruz. İlk olarak Çinli *Tsu Ch'ung-chih*'in (M.S. 480) *pi* için verdiği 355/113=3,1415929... yaklaşık değerini görüyoruz ki, böylelikle ilk 6 ondalık basamak doğru olarak elde edilmiş oluyor. Tabii, Hindular bunun altında kalmıyor. Önce *Aryabhata* (MS 530) 62832/20 000=3,1416 ardından da *Bhaskara* (MS 1150) 3927/1250 değerini *pi* için ortaya atıyor. Takvimler 1429 yılını gösterdiğinde de Semerkantlı Uluğ Bey'in kraliyet gökbilimcisi *Al-Kaşi*, *pi* yi klasik metodu kullanarak 16 ondalık basamağına kadar hesaplamayı başarıyor.

1579 yılında ise *pi* ye kafa yoranlar arasına batı dünyası bir Fransız matematikçiyle katılıyor: *François Viète*. İlk olarak klasik metodla *pi* nin ilk 9 ondalık basamağını doğru elde ediyor. Hem de tam $6\cdot 2^{16}$=393 216 kenarlı çokgenler kullanarak... (Eminim, hesap makinesinin icadını görseydi kahrolurdu!) Aynı zamanda oldukça ilginç bir sonsuz çarpımının altında da imzasını bırakıyor:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Bu eşitliğin ispatını ise gelecek sayıya bırakıyoruz. Kimbilir belki bu süre içinde siz de bu çarpımın altına kendi imzanızı bırakıverirsiniz. İyi hesaplar!

Han Nazmi Özsöylev
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar
Eves, H., *An Introduction to The History of Mathematics*, Saunders College Publishing, 1990
Tepedelenlioğlu, N., *Kim Korkar Matematikten*, Amaç Yayınları, İstanbul, 1990
Titchmarsh, E.C., *Mathematics for The General Reader*, Dover Publications, New York, 1981
Théma *Larousse*, cilt 3, Milliyet, İstanbul, 1993-1994
http://www.chaco.com/useless/useless/pi.html
http://www.ast.univie.ac.at/ wasi/PI/piclub.html
http://www.terranet.net/users/lildevans/archimed.htm
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BigPictures/Rhind_Papyrus.jpeg

Çözmece

Bu ayın soruları

1. S, dokuz farklı gerçel (reel) sayının oluşturduğu bir küme olsun. S kümesinde

$$0<\frac{a-b}{1+ab}<\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

eşitsizliğini sağlayan, a ve b gibi iki eleman olduğunu kanıtlayınız.

2. Tüm $x\in R$ için, $x\neq 0,1$ olmak üzere

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

fonksiyon eşitliğini sağlayan tüm gerçel (reel) değerli fonksiyonları bulunuz.

Geçen Ayın Çözümleri

1. $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, başlangıç noktaları çemberin merkezi, bitim noktaları da sırasıyla A, B, C, D köşeleri olan dört vektör olsun. Başlangıç noktası çemberin merkezi olan $\vec{P}=(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})/2$ vektörünün bitim noktasına P diyelim. AB nin orta noktasından başlayıp P de biten vektör

$$\vec{L_1}=\vec{P}-[(\vec{A}+\vec{B})/2]=(\vec{C}+\vec{D})/2$$

dir ve $|\vec{C}|=|\vec{D}|$ olduğundan $\vec{L_1}$, CD ye diktir. Benzer biçimde AD nin orta noktasını, P noktasıyla birleştiren doğru BC ye; DC nin orta noktasını P ile birleştiren doğru AB ye; BC nin orta noktasını birleştiren doğru da AD ye diktir. Yani soruda dört doğru P noktasında kesişirler.

2.

$$\cos(3a)=\cos(a+2a)$$
$$=\cos a\cdot\cos 2a-\sin a\cdot\sin 2a$$
$$=\cos a(1-2\sin^2 a)-2\sin^2 a\cdot\cos a$$
$$=\cos a(1-4\sin^2 a)$$

$$\cos(3\pi/10)=\sin(2\pi/10)$$

o halde,

$$\cos(\pi/10)\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)$$
$$=2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$$

$$1-4\sin^2\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}$$
$$4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$$
$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$$
$$=\cos\frac{4\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}$$

Aralık sayısındaki yazıdan hatırlayacağınız gibi, $\cos(2\pi/5)$ uzunluğu çizilebiliyorsa düzgün bir 5-gen de çizilebilir. Dolayısıyla düzgün beşgen de cetvel ve pergelle çizilebilir.