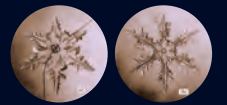


Kar Kristallerinin Matematiği

Dr. Mahir E. Ocak [TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi

Kepler, Descartes ve Hooke'un yaklaşık 400 yıl önce yaptığı ilk çalışmalardan beri kar kristalleri, karmaşık ve simetrik yapılarıyla insanları şaşırtıyor. Her ne kadar kar kristali örnekleri doğadan kolaylıkla toplanıp incelenebilse de kar kristallerinin oluşum sürecinin hâlâ tam olarak anlaşıldığı söylenemez. Atmosferdeki doğal oluşum süreçlerini takip etmek neredeyse imkânsız olduğu için geçtiğimiz yüzyılda kar kristallerinin yapısını anlamaya çalışan araştırmacılar, laboratuvar ortamında yapılan deneylere ve kuramsal modellere yöneldiler. İlk olarak Ukiçiro Nakaya, tavşan tüylerinin ucunda yapay kar kristalleri büyütme-yi başardı. Daha sonraları bulut tünellerinin kullanıldığı ya da tavşan tüylerinin yerini buzdan iğnelerin aldığı başka yöntemler de geliştirildi. Ancak gösterilen tüm çabalara rağmen, kar kristallerini laboratuvar ortamında üretmek bugün hâlâ çok zor.

Kar kristalleri üzerine yapılan kuramsal çalışmalar ve matematiksel modellemelerse gün geçtikçe gelişiyor. Kullanılan modeller daha detaylı hale geldikçe uygulanmaları da doğal olarak zorlaşıyor. Ancak sadece birkaç parametre içeren hayli basit modellerle bile karmaşık kar kristalleri elde edilebiliyor ve yapılarını belirleyen etkenler hakkında fikir edinilebiliyor.



Ukiçiro Nakaya
ve kar kristali örnekleri



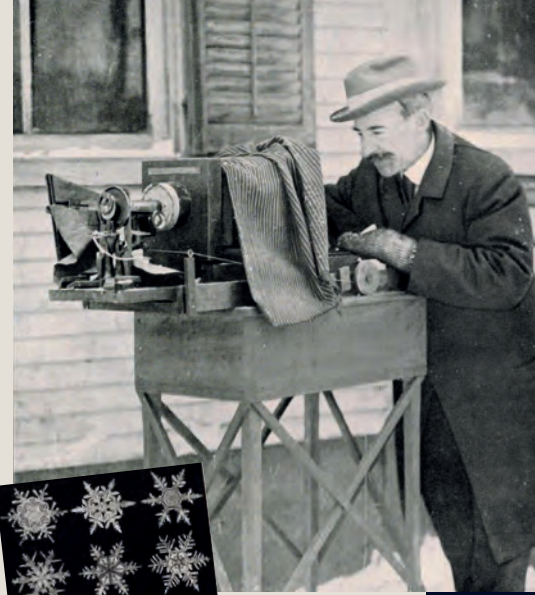
Kristallerin Yapısı

Sıradan kar kristalleri altılı simetriye sahiptir; simetri merkezinden geçen, simetri düzlemine dik bir eksen etrafında $360/6=60$ derece çevrildikleri zaman görünüşleri değişmez. Atmosferde, şekilsiz bir yapıya sahip toz zerreciklerinin etrafında büyümeye başlayan kar kristalleri, önce yavaş yavaş altılı simetriye sahip düzenli bir çekirdek halini alır. Daha sonra boyutları mikron (metrenin milyonda biri) ölçeğinde bir dik altıgen prizma oluşur. Kar kristalleri, milimetre ölçeğindeki nihai büyüklüklerine ulaşana kadar altılı simetri korunur. Ancak çeşitli etkenlere bağlı olarak gelişim sırasında kristaller başkalaşır ve birbirinden çok farklı karmaşık yapılar ortaya çıkar.



Mikroyapı Fotoğrafları

1800'lerin sonlarından beri binlerce doğal kar kristali fotoğraflandı ve tasnif edildi. İlk katalogların en kapsamlısı Wilson Bentley tarafından oluşturuldu. Bu katalogdaki fotoğrafların çoğu güzel görümlü, simetrik düzlemsel yapılı kristallere aitti. 1900'lerin ortalarında kar kristalleri üzerine önemli bilimsel çalışmalar yapan Ukiçiro Nakaya düzensiz, simetrik olmayan kristalleri de içeren çok daha büyük bir katalog oluşturdu. Bir başka kapsamlı katalogsa Kenneth Libbrecht'inkidir. Hem düzlemsel hem de üç boyutlu kar kristallerinin mikroyapılarını gösteren fotoğraflar içeren bu kataloga <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/> adresinden ulaşılabilir.



Wilson Bentley

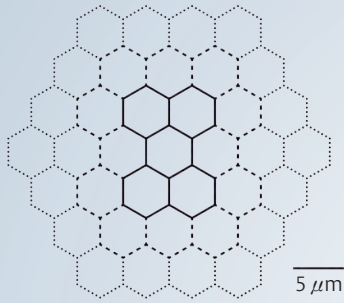


Kenneth Libbrecht



Kar kristalleri nasıl büyüyor Gravner-Griffeath kristal büyüme modeli

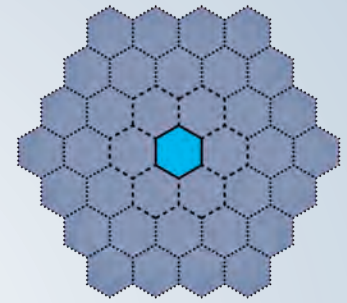
Kar kristalleri altılı simetriye sahip, düzgün altıgenlerden oluşan bir ağda büyütülüyor.



Modelde üç tür kütle bulunuyor.

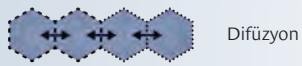
AĞDAKİ BÖLGELER	KÜTLE		
	buz	sıvı	gaz
kar kristali		-	-
sınır			
hava	-	-	

Kütleler hareket edebilir ve her bir adımda hal değiştirebilir.



her bir bölgede ρ kütle

Sınır bölgelerindeki tüm kütle buza dönüşür.



Difüzyon

Komşu sınır ve hava bölgeleri arasında su buharı alışverişi olur.

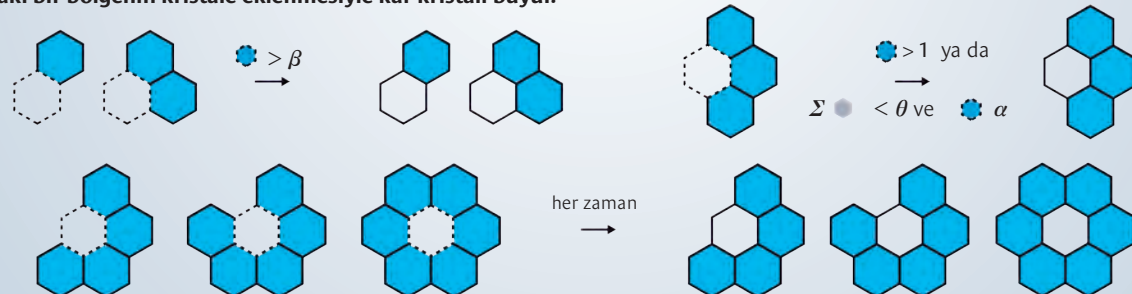


Sınır bölgelerinde su buharı, sıvı suya ya da buza dönüşür.



Sınır bölgelerindeki sıvı veya katı suyun bir kısmı su buharına dönüşür.

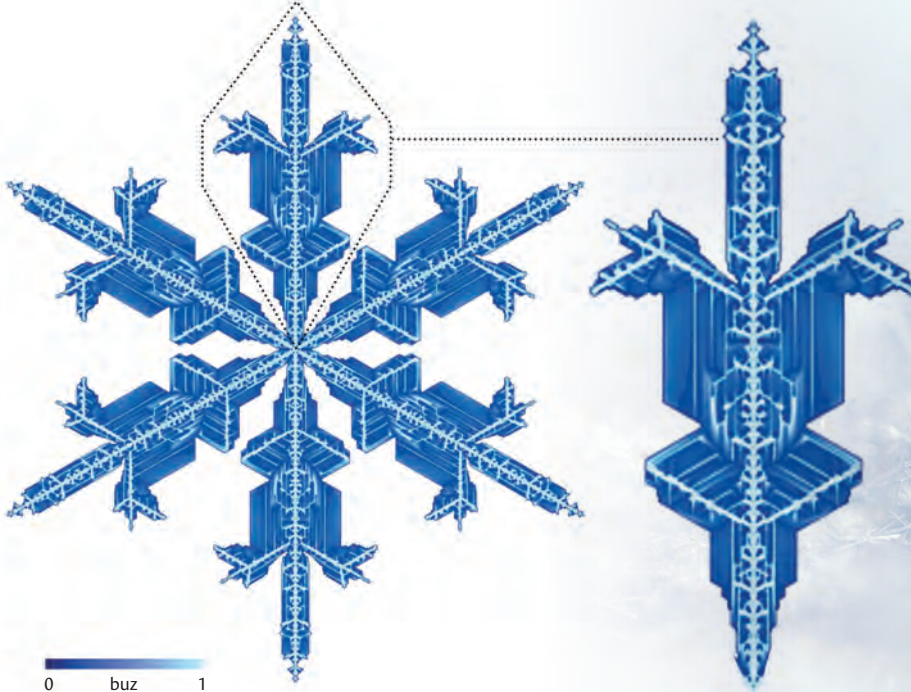
Sınırdaki bir bölgenin kristale eklenmesiyle kar kristali büyür.



Sınıflandırma

Kar kristallerinin mikroyapılarıyla ilgili veritabanı büyüdükçe araştırmacılar kristalleri yapılarına göre sınıflandırmaya başladı. İlk sınıflandırmalardan biri olan Magono-Lee sınıflandırmasında kar kristalleri 80 türe ayrılıyordu. Libbrecht'in yaptığı daha basit bir sınıflandırmadaysa sadece 35 tür var. Düzlemsel yapıya sahip (bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok daha küçük olduğu için sanki iki boyutluymuş gibi görünen) kar kristalleri Magono-Lee sınıflandırmasındaki 13 türü ve Libbrecht'in sınıflandırmasındaki 6 türü içine alır. Magono-Lee sınıflandırmasındaki bu 13 türün bazıları Libbrecht'in sınıflandırmasındaki türlerin hibritleridir.

Canlıları sınıflandırmak için ortaya konan gayretle karşılaştırıldığında, kar kristallerini sınıflandırmak için gösterilen tüm çabaların çok daha keyfi olduğu söylenebilir. Çünkü farklı türlere sahip özellikleri bir arada taşıyan ara türlerdeki kristallerin sayısı çoktur. Örneğin eğrelti otuna benzetilen türlerle dendritlere (sinir hücresinden çıkan uzantılar) benzetilen türler arasındaki ayırım pek de belirgin değildir.



Model Parametreleri

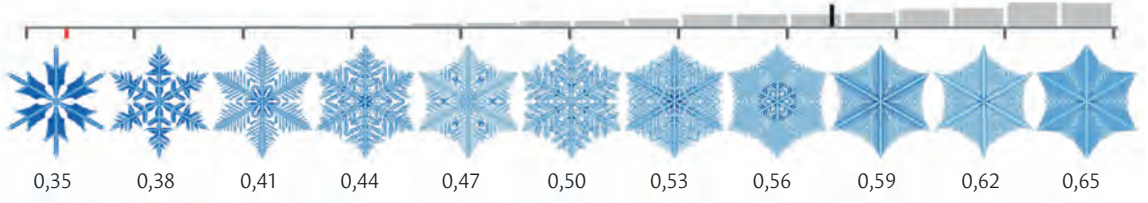
α	0,1548
β	0,069
γ	$6,842 \times 10^{-5}$
κ	0,02201
μ	0,09206
ρ	0,36
θ	0,06171

Gravner-Griffeath modeli kullanılarak büyütülmüş bir kar kristali.
Farklı buz miktarları, mavinin farklı tonlarıyla gösteriliyor.

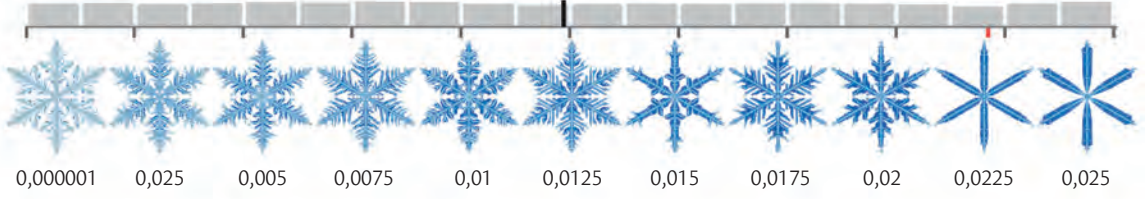
Parametrelerin, kar kristallerinin şekline etkisi

Her parametreyi tek tek değiştirerek model daha iyi anlaşılabilir.

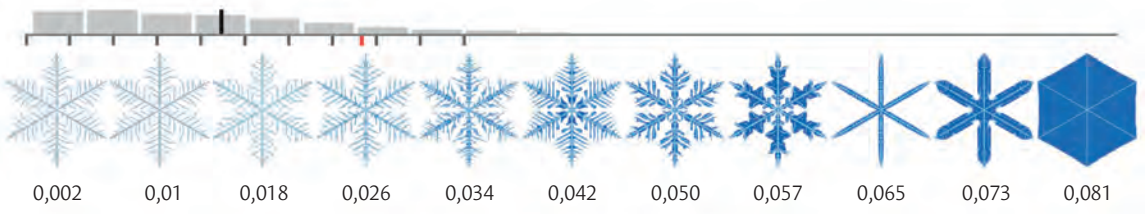
ρ
su buharı
yoğunluğu



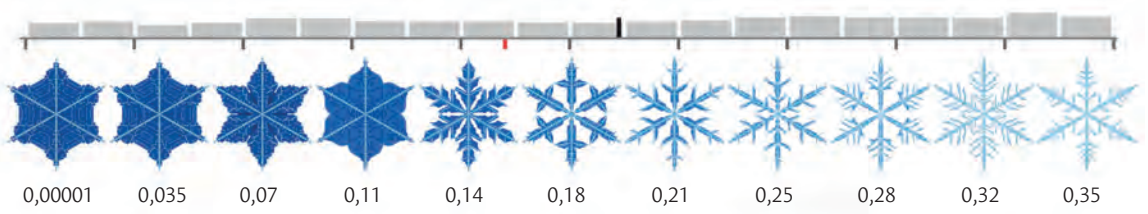
K
soğuma



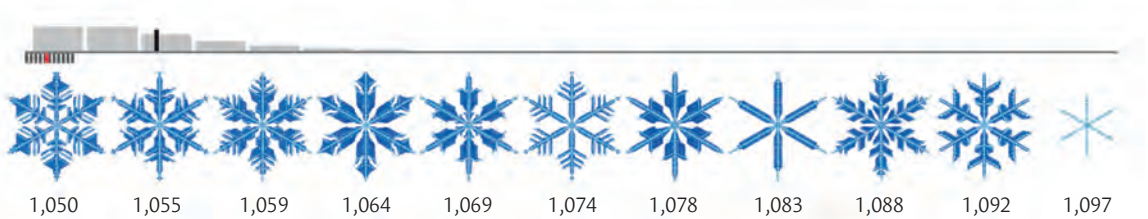
θ
eklenme



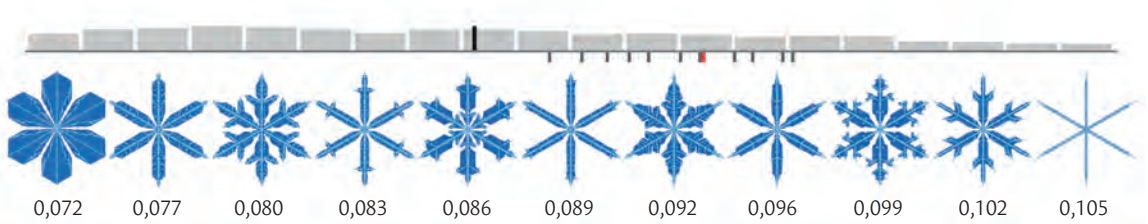
α
eklenme



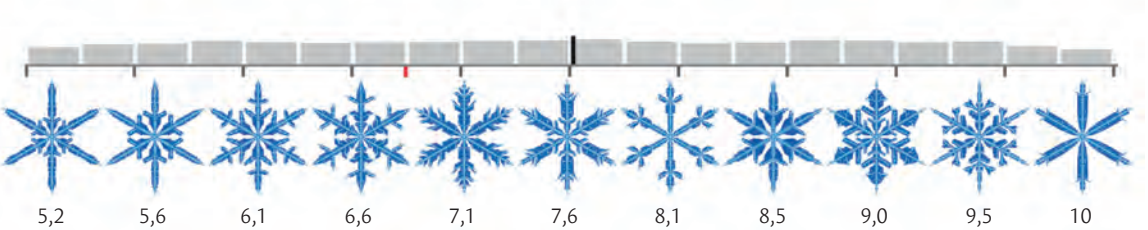
β
eklenme



μ
ısınlma



γ
ısınlma



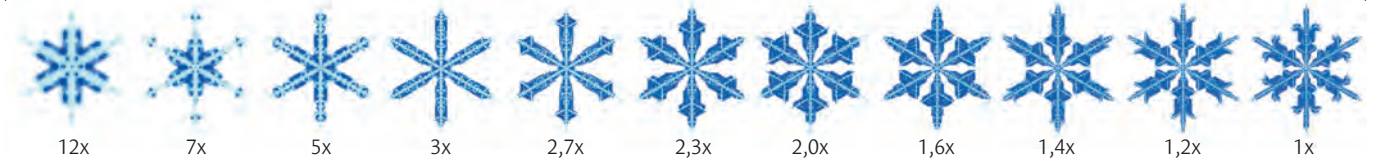
Kar kristali büyürken

Sınırdaki bölgeler kristale eklendikçe su, gaz halden sıvı ve katı hale geçer. Kristal pek çok adımda şekillenir.



Bu kristal 800x800 bölgeden oluşan bir ağda 15.353 adımda büyüyor.

adım sayısı, n



Kar kristalinin gelişimi, ara adımlardaki kristalleri zumlayarak takip edilebilir.

büyütmeye oranı



Kar kristali çevredeki su buharından kütle kazanır.

Kar kristallerinin büyüme hızı parametrelere bağlı olarak değişir.

KÜTLE

0 su buharı 1 0 buz 1



800x800 bölgeden oluşan ağdaki kar kristallerinin tamamen büyümesi için gerekli adımların sayısı.

Son kutu, benzetimlerde izin verilen azami adım sonunda tam olarak büyümemiş kristalleri gösteriyor.

Simetrik ve Karmaşık Yapı

Bugün kar kristallerinin simetrik ve karmaşık yapısını açıklayan bilimsel görüşlerin en yaygın olarak kabul göreni, kristallerin gelişimini belirleyen etkenlerin “korumada homojen”, “zamanda değişken” olmasıdır. Küçük kristallerin içinde bulunduğu ortamın koşulları anlık olarak neredeyse homojendir. Kristallerin altı kolunun tamamı belirli bir anda aynı sıcaklığa, basınca ve neme maruz kalır ve dolayısıyla aynı hızla ve aynı biçimde büyürler. Ancak büyüme sırasında kristaller bulut içinde hareket ederken koşullar zamanla değişir. Farklı kristaller farklı rotalar takip ettikleri için birbirlerinden farklı biçimde gelişirler.

Şunu da not etmek gerekir ki kar kristalleri esasen zannedildiği kadar simetrik değildir. Fotoğraf koleksiyonlarında yer alan kristallerin yapıları, bu yapıların doğada bulunma sıklığı konusunda bir fikir vermez. Örneğin Libbrecht, çektiği fotoğrafların ancak binde birini yeterli kadar güzel bulup sakladığını söylüyor. Kar kristallerinin insanlara güzel görünenleri, genel olarak sıra dışı simetrik yapılara sahip olanlardır. Dolayısıyla koleksiyonlarda yer alan fotoğrafların büyük çoğunluğunun simetrik olması, kar kristallerinin genel olarak simetrik yapıldığını göstermez.

Kuramsal Modeller

Kar kristalleri ufak bir çekirdek etrafında büyürken gerçekleşen fiziksel süreçler ve sonuçta ortaya çıkan kristallerin yapısı her ne kadar hayli karmaşık olsa da, sadece birkaç parametreden oluşan basit algoritmalar kullanılarak yapılan benzetimlerle bile bu karmaşık yapıları elde etmek mümkün olabiliyor. Örneğin Janko Gravner ve David Griffeath tarafından geliştirilen bir algoritma da, kristal yapıya sahip bir bölgenin durumu dört sayıyla temsil ediliyor ve çevresiyle etkileşerek zamanla nasıl değişeceğini belirleyen altı parametre bulunuyor.

Gravner-Griffeath algoritmasıyla ilgili bir betimlemeyi 42. sayfada görüyorsunuz. Başlangıçta düzgün altıgenlerden oluşan, benzetimin sonunda ortaya çıkacak nihai yapının altılı simetriye sahip olmasını sağlayan bir ağ alınıyor. Her bir altıgenin durumu dört sayıyla temsil ediliyor: a , b , c ve d . Bu sayılardan a , eğer altıgen büyüyen kristalin bir parçasıysa 1 değerini, değilse 0 değerini alıyor. Diğer sayılar b , c , ve d ise sırayla o altıgenin içerdiği sıvı, katı ve gaz halindeki su miktarını belirtiyor. Başlangıçta altıgenlerden birine ρ miktar buz ekleniyor ve büyüyecek kar kristalinin merkezi olarak tanımlanıyor ($a=1$). Diğer tüm altıgenlereyse ρ miktar su buharı ekleniyor ve büyüyecek kar kristalini besleyecek ortam olarak tanımlanıyor ($a=0$). Bir altıgen, kristale eklendikten sonra herhangi bir değişime uğramıyor. Kristalin dışında kalan altıgenlerse zamanla değişiyorlar. Benzetimlerdeki her bir adımda kristalin dışında kalan altıgenlerin içindeki su buharının $6/7$ 'si difüzyon yoluyla o altıgeni çevreleyen 6 altıgene eşit miktarda yayılıyor. Kristal yapıya komşu altıgenlerdeki katı, sıvı, gaz halindeki su miktarının nasıl değişeceği ve altıgenin kristale eklenip eklenmeyeceği altı parametre tarafından belirleniyor: α , β , γ , θ , κ , ve μ . Bu parametrelerden μ ve γ sırasıyla gaz haline geçecek buz ve sıvı su oranını belirliyor. Katı ve sıvı hale geçecek su buharı oranlarıysa sırasıyla κ ve $1-\kappa$ olarak hesaplanıyor. Modeldeki diğer üç parametreyse sınır bölgesindeki (komşularından en az biri kristal yapıya dâhil olan) bir altıgenin kristale eklenip eklenmeyeceğini belirlemek için kullanılıyor. Eğer sınır bölgesindeki bir altıgenin altı komşusunun bir ya da iki tanesi kristalin bir parçasıysa o altıgenin kristale eklenip eklenmeyeceğine karar vermek için β parametresine bakılıyor.



Altıgendeki toplam su miktarı β 'dan fazlaysa altıgen kristale ekleniyor (altıgenin a değeri 0'dan 1'e yükseliyor), azsa eklenmiyor (a değeri 0 olarak kalıyor). Sınır bölgesindeki bir altıgenin üç komşusunun kristalin bir parçası olması durumundaysa α ve θ parametrelerine bakılıyor. Eğer altıgendeki toplam su miktarı 1'den fazlaysa ya da su buharı miktarı θ 'dan az ve toplam su miktarı α 'dan fazlaysa altıgen kristale ekleniyor. Diğer durumlardaysa eklenmiyor. Sınır bölgesindeki bir altıgenin 4, 5 ya da 6 komşusunun kar kristalinin bir parçası olması durumundaysa altıgen hiçbir parametreye bakılmadan doğ-

rudan kristale ekleniyor. Sınır bölgesindeki bir altıgen kristale eklendiğinde tüm kütlesi kalıcı olarak buza dönüşüyor. Her bir adımda uygulanan bu işlemlerin tamamı deterministik, yani aynı başlangıç koşulları için her zaman aynı sonuçlar elde ediliyor. Ayrıca altıgenlerdeki su buharı miktarını her bir adımda belirli bir parametreye bağlı olarak değiştirmek ve böylece algoritmaya rastlantısallık eklemek de mümkün.

Gravner-Griffeath algoritması ve benzeri algoritmalar her ne kadar sadece birkaç parametreden oluşsa da ürettikleri kar kristali modelleri hayli karmaşık olabiliyor. 44. sayfada Martin Krzywinski ve Jake Lever'in Gravner-Griffeath algoritmasını kullanarak elde ettikleri çeşitli kar kristalleri yer alıyor. Araştırmacılar, 800x800 altıgendeki oluşan bir ağ kullanmışlar ve sistemin gelişimini 30.000 adım boyunca takip etmişler. Parametrelerdeki ufak değişikliklerin sonuçları nasıl etkilediği de yine bu şekillerde görülüyor.



Gravner-Griffeath algoritması kar kristallerini iki boyutlu bir ağda büyüttüğü için sadece düzlemsel kar kristalleri üretebiliyor. Başka algoritmalarla üç boyutlu kar kristalleri üretmek de mümkün. Ancak algoritma karmaşıklaştıkça benzetimleri yapmak zorlaşıyor. Yine de sonuçlardan da görülebileceği gibi Gravner-Griffeath ve benzeri basit algoritmalarla bile kar kristallerinin oluşum süreçleri hakkında fikir edinmek mümkün.

Kaynaklar

Gravner, J., Griffeath, D., "Modeling snow crystal growth II: a mesoscopic lattice map with plausible dynamics", <http://psoup.math.wisc.edu/papers/h2l.pdf>, 2007.

Krzywinski, M., Lever, J., "In silico flurries", *Scientific American*, <https://blogs.scientificamerican.com/sa-visual/in-silico-flurries/>, 23 Aralık 2017.