# MATEMATİKTE GÖDEL DEVRİMİ

1931 yılında, Avusturyalı genç bir matematikçi, matematik camiasını derinden sarsan ve matematiğe farklı şekilde bakmaya zorlayan bir makale yayımladı. Bu matematikçi, Kurt Gödel'di. Makalesinde ispatladığı teorem de Gödel'in Eksiksiz-Olmama (incompleteness) Teoremi, ya da basitçe Gödel Teoremi olarak anıldı. Çok başarılı çalışmaları bu önemli teoremden ibaret değildi. Gödel, aynı zamanda bilgisayarların temelini oluşturan yinelgen (recursive) fonksiyonlar teorisinin de yaratıcılarından biriydi.

Gödel 28 Nisan 1906'da, şimdi Çek Cumhuriyetinde Brno olarak bilinen, Avusturya'nın Brün kentinde doğdu. Lise döneminde her bakımdan parlak bir öğrenci, Viyana Üniversitesi'nin de yıldızıydı. Mezuniyet sonrası çalışmalarını da burada yaparak 1929'da doktorasını tamamladı ve doğrudan eğitim kadrosuna alındı. Ünlü teoremini ispatladığı yer de burasıydı. Ancak 1940 yılına gelindiğinde, artan Nazi zulümü karşısında Viyana'dan kaçtı ve daha önce 1934'te ziyaret etmiş olduğu, Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde çalışmaya başladı. 14 Ocak 1978'deki ölümüne kadar orada kaldı. Dünyanın en önde gelen mantık uzmanı olduğu düşünülen bu adamın ölümü de hayli şaşırtıcı oldu. Erişkin yaşamının büyük bölümünde hastalık hastası olan Gödel, yaşlandıkça kendisine zehir verilmekte olduğuna kesin gözüyle bakmaya başladı, sonunda yemek yemeyi tümüyle bırakarak açlıktan öldü.

Gödel'in mantık dışı davrandığı kuşku götürmez; ama ölümü onun ününü azaltmadı. İki yıl önce *Time* dergisi 20. yüzyılın en etkileyici düşünürleri konusunda bir anket yaptığında, ilk 20 arasına giren iki matematikçiden biri Gödel'di; öteki de Alan Turing.

Eksiksiz-olmama teoremi matematikte bir şeyin doğru olduğu söylendiğinde, matematikçileri bunun ne anlama geldiğini düşünmeye zorladı. Bunun matematik anlayışımızda yol açtığı değişim, 19. yüzyılda Öklid-dışı geometrilerin keşfedilmesinin geometri anlayışımızda yaptığı değişimden daha az dramatik değil.

Bu büyük keşiflerin ikisi de aksiyomatik sistemlerle ilgiliydi. Bu nedenle, matematikçilerin "aksiyom" sözcüğünden ne anladıklarını ve aksiyomların matematikte oynadığı rolü kavramadan, bu keşifler tam olarak anlaşılamaz. Gödel Teoremi hakkında yıllar boyu yazılan onca saçmalığın ardında yatan da, aksiyomların doğasına ilişkin yanlış anlamalar.

Gödel Teoremi özetle şunu söyler: Elementer aritmetiği içerecek ölçüde zengin herhangi bir aksiyomatik sistemde, doğru olan, ancak aksiyomlar kullanılarak ispatlanması olanaksız olan matematiksel ifadeler vardır; mantıksal terminolojiyle, aksiyom sistemi eksiksiz (complete) değildir.

Gödel'in bu teoremi ispat ettiği dönemde, yeterince çabayla matematiğin bütününü içerecek aksiyomların formüle edilebileceğine kesin gözüyle bakılıyordu. Eksiksiz-olmama teoremi bu umutları yok etti; birçok matematikçi de bunun, elde edebileceğimiz matematik bilgisinin bir sınırı olduğu biçiminde yorumladı. Ancak şimdilerde böyle düşünenlerin sayısı çok az. Matematiksel doğruluk anlayışımızda Gödel Teoreminin yol açtığı değişim o kadar etkili olmuştur ki, günümüzde çoğu kişi, sonucun aksiyom sistemlerinin sınırlılığı konusunda yalnızca teknik bir görüş olduğunu düşünür.

Gödel Teoreminin başlangıçta yarattığı çarpıcı itkiyi anlamak için o dönemin koşullarına göre düşünmek gerekir. 19. yüzyılda matematikçiler sezgisel görünen kavramların çoğunun sorunlara yol açtığını öğrenmişlerdi; reel sayıların sürekliliğinin (continuum) yapısı ve sürekli fonksiyonların doğası da bunlar arasındaydı. Sezgiyi ve güvenilir olmayan varsayımları temel almanın yol açabileceği yanılgıları önlemek amacıyla Eski Yunan döneminde kullanılan ve o zamandan sonra bir yana bırakılan, aksiyomatik yöntem denen bir yöntemle matematik yapmaya büyük önem vermeye başladılar. Bu yöntemde, ilgilendiğiniz kavram ya da sistemi kapsadığını düşündüğünüz bir dizi varsayımı - ya da aksiyomu- kesin ifadelerle yazarak işe başlarsınız. Sonra da bu aksiyomları kullanarak yaptığınız mantıksal çıkarımlarla, kavram ya da sistem hakkında 'doğru' ifadeler elde edersiniz.

Bu yaklaşımın en iyi bilinen örneği, geometri için Öklid (Eukleides) aksiyomlarıdır. Dev boyutlu eseri *Elements*'de Öklid, düzlem geometrisi konusundaki bütün doğru ifadelerin çıkarsanabileceğini düşündüğü beş ilke sıraladı. Aksiyomlar, gerçeklik arayışında başlangıç noktası olarak seçildikleri için, onların doğru oldukları konusunda hiçbir kuşku olmaması gerekir. Aksiyomlar, doğrulukları aşikar olan basit önermeler olmalıdırlar.

Öklid'in beşinci aksiyomu şunu söyler: "Her *l* doğrusu ve bu doğru üstünde olmayan her *P* noktası için, *P* noktasından geçen ve *l*'ye paralel olan tek bir m doğrusu vardır." Paralel Postülatı denen bu aksiyom konusundaki kuşkular yüzyıllar boyunca Öklid geometrisinin peşini bırakmadı. Duyulan kuşku, onun ifadesinin, öteki dört aksiyomunkiler gibi basit olmamasından kaynaklanıyordu. Bu sorunu çözmek için aksiyomu daha basit varsayımlardan çıkarsama çabaları hiçbir sonuç vermeden sürdü gitti; ta ki çok çarpıcı bir keşif yapılana kadar: Aksiyomun, paralellik konusundaki doğal insan içgüdüleriyle her ne kadar uyum içinde olduğu söylenebilirse de, aksiyom olarak içerilmesi tümüyle keyfî bir durumdu. Paralel Postülatı bir aksiyom olarak alan Öklid'in bilindik geometrisi, olanaklı başka geometrilerden yalnızca biridir. Bu geometrilerden biri üzerinde karar kılmak, tercihe ya da amaçlanan uygulamaya bağlıdır.

Gerçekte Öklid'in aksiyomlarında, Paralel Postülatının içerilmesinden çok daha büyük bir sorun vardı. Hem kendisi, hem de nesiller boyu gelen birçok takipçisi, onun aksiyomlarından çıkardıklarını düşündükleri teoremleri, gerçekte, onun listesinde olmayan birçok temel varsayımın bilinçaltındaki varlıklarını kullanarak ispatlamışlardı. 19. yüzyıl sonlarında Alman matematikçi David Hilbert, eksik olan bu önemli aksiyomları yazıya dökerek işleri düzene koydu.

Hilbert'in dikkatini çeken sorunlar konusunda bir fikir vermek amacıyla şu örneği ele alalım; cetvel ve pergel kullanarak bir eşkenar üçgenin çizimi gibi çok basit bir örnek. Bir doğru parçasıyla başlayarak onun iki uç noktasından pergelle, doğru uzunluğunu yarıçap alan iki yay çizersiniz. Bu yayların kesiştiği nokta, eşkenar üçgenin üçüncü köşesini belirler. Her şey akla yakın görünüyor. Bu adımları kullanarak bir eşkenar üçgen çizmeniz mümkün.

Ancak Hilbert, bu iki yayın kesiştiğinden nasıl emin olabileceğimizi sorguladı. Yani, ortak noktaları olduğunu nereden biliyoruz? Kağıt üzerine çizilen iki yay kesişir göründü diye, bir kesişme noktasının gerçekten varolduğunu kesin bir şekilde söyleyemeyiz. Kalemle çizilen çizgilerin tersine, ideal çizgilerin kalınlığı yoktur. Öyleyse kalınlığı olmayan iki yayın ortak bir noktası olduğundan nasıl emin olabiliriz? Yanıt, emin olamayacağımız yönünde. Eğer iki yayın kesişmesini istiyorsak, bunu sağlayacak bir aksiyoma gerek vardır. Bu akla yakın bir aksiyomdur ve yay çizme konusundaki sezgilerimizle uyum içindedir. Ancak ispat edilebilecek bir önerme değil, bir varsayımdır.

Hilbert'in bu çalışması bize, matematiğin herhangi bir dalında kullanılan varsayımların hepsini belirlemenin ne kadar zor olabileceğini gösterir. Geometrideki aksiyomlar konusundaki çalışmasının hemen ardından Hilbert, matematik için hayli geniş kabul gören bir görüş ileri sürdü. Formalizm adı verilen bu görüşe göre matematiğe, temelde bir oyunlar topluluğu (yığını) olarak bakılmalıdır; bu oyunların her biri, tümüyle belirlenmiş kurallara göre oynanmalıdır.

Sözgelimi Öklid geometrisiyle uğraşmak, Öklid geometrisi oyununu oynamaktır. Bu oyunda Öklid geometrisinin aksiyomlarıyla başlayıp, tümüyle belirlenmiş kurallara göre sembolleri mekanik olarak kullanarak, Öklid geometrisinin bütün gerçeklikleri çıkarılabilir. Aksiyomların ve kurallarının belirlemediği hiçbir şey kullanılamaz. Özellikle de noktaların ve doğruların özellikleri konusunda hiçbir sezgisel algılama kullanılamaz ve kullanılmamalıdır da. Hilbert'in dediği gibi, noktalar ve doğrulardan sözedildiği bir konuşmada, onların yerine sözgelimi kahve fincanı ve masa sözcüklerini kullanabilirsiniz; yeter ki aksiyomlar, bu nesneler kullanılarak ifade edilsin. O zaman elde edilen teori, gerçekte kullanılan sözcükler dışında her bakımdan özdeştir.

Her türlü sezgiyi, nokta ve doğruları kahve fincanları ve masalardan farksız kılacak ölçüde ortadan kaldırmanın, matematiği farkedilmeyen ve yanlış yönlendirici varsayımların tehlikesinden tümüyle kurtaracağı düşünülüyordu. Sizin için kuralları izleyecek ve bütün gerçeklikleri elde edebilecek mekanik cihazlar (ki bunların sezgileri olmadığı kesin) tasarlamak, ilke bakımından olanaklıdır. (Tabii ki tüm bunlar, bilgisayarlar icat edilmeden önceydi.)

Matematiksel doğruluğun, ispatlanabilir olmayla (yani matematiğin doğru önermelerinin, gereken biçimde ifade edildiklerinde, aksiyomlar kullanılarak ispat edilebilir olmaları) aynı şey olduğuna inanan matematikçiler (formalistler) için Gödel Teoremi yıkıcı oldu. Ancak, daha önce de söz edildiği gibi, günümüzde matematikçiler, onu aksiyomatik sistemlerle başarılabilecek şeylerin sınırlı olduğunun bir doğrulaması olarak düşünür.

Bunu yapmalarını mümkün kılan şeyse, çağdaş matematikçilerin, Gödel Teoreminin bize öğrettiklerinden gereken dersi almış olmaları. Gödel'in sonucu matematiği pek fazla değiştirmemiş olabilir. Ancak bizim matematiğe bakışımızı değiştirdi. Onun, 20. yüzyılın en etkileyici yirmi düşünürü arasında yer almayı hakkettiği, kuşku götürmez.

Çeviri: Nermin Arık

Kaynak
Devlin, K. "Kurt Gödel - Separating Truth From Proof in Mathematics" Science, 6 Aralık 2002

Gödel ve Einstein, Princeton'da bir yürüyüş sırasında

## Hilbert ve Yıkılan Umutlar

Matematiğin belirli bir kolundaki bütün gerçeklikleri çıkarmak için gereken aksiyomları mekanik olarak formüle etmek şeklindeki yaklaşım, Hilbert Programı olarak adlandırıldı. Birçok matematikçi için aksiyomları aramak Kutsal Kâse'yi aramak türünden bir amaca dönüştü. Ne var ki, bunlar arasında matematik çalışmalarında insan sezgisinin rolüne büyük saygı duyan Hilbert yoktu ve başkalarınca kendi adının verildiği programın gerçekleştirilmesinide asla önermedi.

Hilbert programını gerçekleştirme yolunda en büyük destek ve çaba İngiliz filozofları Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead'den geldi. Üç ciltlik dev boyutlu ortak çalışmaları *Principia Mathematica*, 1910 ile 1913 yılları arasında yayımlandı. Bu çalışma temel aritmetiği ve mantığın kendisini, aksiyomlardan geliştirme girişimiydi.

Hilbert programının amacının olanaksız olduğunu göstermek için Gödel'in seçtiği örnek de *Principia Mathematica*'daki aksiyom sistemiydi. Makalesinin başlığı şöyleydi: "Principia Mathematica ve onunla ilgili sistemlerin formal olarak saptanabilir olmayan ifadeleri üzerine." Gödel'in ispatını yaptığı dönemde genel kanı, eksiksiz-olmama teorisini izlemenin zor olduğu yolundaydı. Ancak uzun süredir onun gerçekte oldukça basit bir sonuç olduğu farkedildi. Gödel'in orijinal ispatının karmaşıklığı büyük ölçüde yersiz olup, argümanın ifade biçiminin bir sonucudur. Aslında Gödel'in yaptığı, bilinen "Yalancı Paradoksu"nu alıp, aritmetiği içeren bir aksiyomatik sistem içinde onun nasıl yeniden oluşturulacağını göstermekti.

Eski Yunan'a uzanan Yalancı Paradoksu, bir kişi "yalan söylüyorum" dediğinde ortaya çıkar. Eğer bu kişi yalan söylüyorsa önerme doğrudur; öyleyse yalan söylemiyordur. Eğer yalan söylemiyorsa önerme yanlıştır; öyleyse yalan söylüyordur. Kaçınılmaz gibi görünen bir paradoks... Gödel benzer bir önerme ele aldı ("Bu önerme ispatlanamaz" önermesini) ve onun aritmetikte bir matematiksel formül olarak nasıl ifade edilebileceğini gösterdi.

Bunu yapmak için önce önermeleri sayı olarak kodlamak gerekiyordu; bu, Gödel numaralaması denen bir süreç. O dönemde oldukça derin ve zor bir adım olarak düşünülen bu süreci, günümüzde bir sürü casus filmi de kullanır! Mesajları şifreleme sırasında İngilizce sözcükler ve tümceler sayı dizileri olarak kodlanır. Gödel'in bir sonraki adımı, ispatlanabilir olma kavramının aritmetik içinde nasıl ifade edildiğini göstermekti. Bu daha derin bir içerik taşıyordu; ama günümüz matematikçileri için bu da rutin bir şey haline gelmiş gibidir.

Kodlama yapıldıktan sonra sonuç artık kaçınılmazdı. Eğer aksiyom sisteminin tutarlı olduğu (yani, kendi içinde bir tutarsızlığa yol açmadığı) varsayılırsa, önermenin ispatlanabilir olmadığı aşikardır (ispatlanabilir olmadığını kendisi söylemişti.). Bu nedenle doğrudur; ama ispatlanabilir değildir.