Emrehan HALICI

BEZİER EĞRİLERİ İLE VERİ INTERPOLASYONU

Katkıda Bulunanlar :
Ferhat BÜYÜKKÖKTEN, Oğuz IŞIKLI

Günümüzün grafik amaçlı paket programlarının en önemli özelliklerinin başında, programın verilmiş bir nokta setinin bütün elemanlarından geçen bir eğriyi hesaplayabilmesi geliyor. Adını, bu sistemi ilk kez Renault otomobillerinin tasarımında kullanan Fransız mühendisi Bezier'den alan bu eğrilerin göze en hoş gelecek şekilde hesaplanabilmesi, oluşturulan çizim için büyük önem taşımaktadır. "Mouse" gibi bir etkileşim aracı ile, oluşturulması istenen eğrinin bütün noktalarının belirlenmesi oldukça zor bir iştir. Bunun yerine eğrinin mutlaka geçmesi istenen noktaların yine "Mouse" ile belirlenmesi ve işin kalan kısmını bilgisayarın halletmes oldukça kolay bir çözüm olmaktadır.

Belirli bir nokta setinin bütün elemanlarından geçen eğrinin hesaplanması oldukça eski bir problemdir. Ancak J.L.Lagrange (1730-1813) ve C.Hermite (1822-1901) tarafından geliştirilen ve bugün de kullanılan metotların üstüne pek çok çalışma yapılmasına rağmen, istenilen eğrinin üretilmesi hâlâ tam anlamıyla gerçekleştirilememektedir. Bilgisayarın insanda bulunmayan açı, uzaklık gibi pek çok bilgiye sahip olmasına rağmen, herhangi bir çekişmede teknik ressam veya desinatör teknolojiye galip gelmektedir.

Bu yazıda anlatılan algoritma ile mümkün olduğu kadar memnun edici interpolasyonlar elde edilebilmektedir. Amaç, veri interpolasyonu ile etkileşim tekniklerini birleştirerek, kullanıcıya eğriyi istediği hale getirene kadar değiştirme imkânı vermektir. Kullanılan metot, Braunschweig Teknik Üniversitesi'nden L.Piegl tarafından geliştirilmiş ve Ankara Bilkent Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü'nden Oğuz Işıklı tarafından bilgisayara uygulanarak denenmiştir.

— Eğrinin şekli

Oluşturulan eğrinin formunu etkileyen faktörler şunlardır:

— Yaklaşımdan öte interpolasyon sağlanabilmesi için, kullanılan verinin mümkün olduğu kadar kesin olması gerekmektedir. Anlatılan metot, eğride meydana gelebilecek büküm noktalarını göz önüne alarak kübik interpolasyon uygulamaktır.

— Eğrinin herhangi bir bölümü sadece çevresindeki veri ile tanımlandığından, bu bölümdeki değişiklikler eğrinin tamamını bozmamaktadır.

— Veri kümesindeki her noktanın bir ağırlık katsayısı ile ifade edilebilmesi, o noktanın eğriye olan katkısının belirlenebilmesini sağlamakta ve böylece eğrinin o bölümü ile oynanabilmektedir. Ayrıca interpolasyonun eğrinin her noktasındaki türevler üzerinden gerçekleştirilmesi sayesinde, eğrinin her noktasında türevi tanımlıdır.

— İnterpolant

Veri kümesi elde edildiğinde yapılacak ilk iş, eğrinin kontrol noktalarındaki tanjantlarının hesaplanmasıdır. Birbirini izleyen 5 kontrol noktası alındığında (bunlara R_{j-2}, R_{j-1}, R_j, R_{j+1}, R_{j+2} diyelim; s_{j-1}, s_j, s_{j+1} ve s_{j+2} de söz konusu noktalar arası fark vektörleri olsunlar) eğrinin R_j noktasındaki eğim vektörü olan t_j

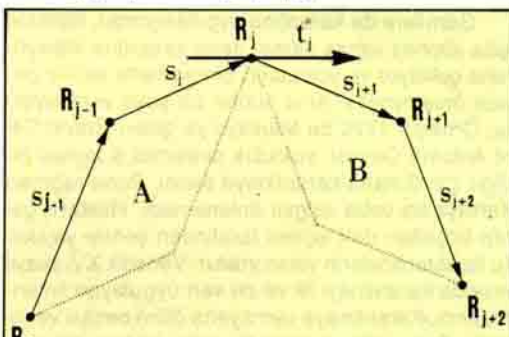
$$t_j = (1-u)s_j + us_{j+1}$$

ile ifade edilebilmektedir. Buradaki u değişkeni ise

$$u = \frac{A}{A+B}$$

olarak A ve B gibi iki değişkene bağlıdır. Sözü geçen değişkenler, R noktasının sırasıyla soldaki ve sağdaki ikişer nokta ile oluşturduğu paralelkenarların alanlarıdır.

($A = s_{j-1} X s_j$, $B = s_{j+1} X s_{j+2}$ ve X skaler çarpım)



R_j noktasındaki tanjant

Burada dikkat edilecek hususlar şunlardır:

- Sadece A = O, s_{j-1} ve s_j doğrusal ise $t_j = s_j$
- Sadece B = O, s_{j+1} ve s_{j+2} doğrusal ise t_j =

s_{j+1}
• A = O ve B = O

— Fark vektörleri ikişer ikişer doğrusal ise $t_j = (s_j + s_{j+1})/2$

— Fark vektörlerinin dördü de doğrusal ise $t_j = s_{j+1}$

Görüldüğü üzere bu yöntem ile birbirini izleyen doğrusal üç kontrol noktası için düzgün doğrular üretilebilir ve istenmeyen sapmalar önlenebilir.

Buradaki bir başka önemli nokta da, ilk iki ve son iki noktalardaki eğimlerin hesaplanabilmesi için, iki tarafta da ikişer noktaya ihtiyaç duyulmasıdır. Bu problem,

$$s_o = 2s_1 - s_2$$
$$s_{-1} = 2s_o - s_1$$
$$s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}$$
$$s_{n+1} = 2s_{n+1} - s_n$$

şeklinde tanımlanan fark vektörlerinin hesaplanması ile çözülebilir. Buradaki n, kontrol noktalarının sayısıdır. Eğer eğri kapalı bir eğri ise ($R_o = R_n$), zaten gerekli ikişer vektör, eğrinin öteki uçlarından tanımlıdır.

— Kübik interpolasyon

Şimdi sıra R ve R gibi birbirini izleyen iki kontrol noktası arasındaki eğrinin hesaplanmasındadır. Üçüncü dereceden interpolasyon için iki kontrol noktasına daha ihtiyaç vardır. Bu noktalar t_j ve t_{j+1} tanjant vektörlerinin üstünde olduğundan

$$T_j = R_j + a_j t_j$$
$$T_{j+1} = R_{j+1} - b_{j+1} t_{j+1}$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Buradaki a_j ve b_j, eğrinin yuvarlaklığını belirlemede kullanılan ve genellikle birbirine eşit olan iki değişkendir. İlk denemede bunlar 0,5 olarak alınabilir.

h_j ve h_{j+1}, R_j ve R_{j+1} noktalarının ağırlıkları olsun.

Artık R_j ve R_{j+1} arasındaki eğri

$$R(t) = \frac{(1-t)^3 R_j + 3h_j t(1-1)^2 T_j + 3h_{j+1} t^2(1-t) T_{j+1} + t^3 R_{j+1}}{(1-t)^3 + 3h_j t(1-t)^2 + 3h_{j+1} t^2(1-t) + t^3}$$

polinomunun t[0,1] aralığındaki değerlerinin hesaplanması ile elde edilebilir.

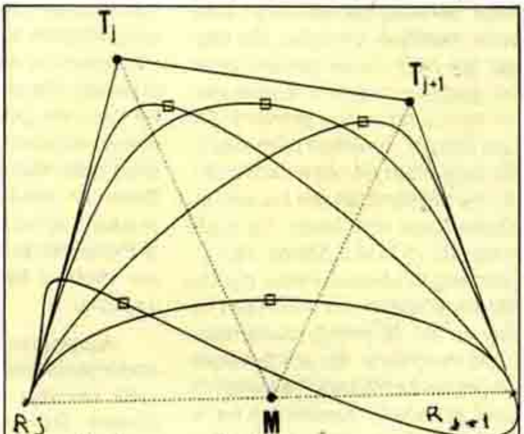
— Değişiklikler

Sırasıyla bütün kontrol noktalarındaki eğim vektörlerinin hesaplanması ve ardından birbirini izleyen nokta çiftleri için eğri parçalarının hesaplanması ile bütün ağırlıkları 1 olan bir Bezier eğrisi elde edilmiştir. Artık kullanıcının isteğine göre birtakım değişiklikler yapılabilir.

— Eğriye uymayan kontrol noktalarının yeri değiştirilebilir.

— Genel karakteri bozmamak üzere, bazı bölgelerdeki a ve b katsayıları, eğride istenen yumuşaklığı sağlamak üzere ayarlanabilir.

— Ağırlıkların deneme-yanılma yöntemiyle ayarlanabilmesi yanısıra, eğrinin kontrol noktaları haricinde geçmesi istenen noktalar belirlenebilir. Örneğin R(t) polinomunda t = 0,5 değeri için hesaplanmış değer (buna omuz noktası da denebilir) değiştirildiği zaman, bu omuz noktasının sağ ve solundaki yani t = 0 ve t = 1 değerlerine ait kontrol noktalarının ağırlıkları değişecektir. Bu yeni ağırlıklar sayesinde bilgisayar yeni eğriyi hesaplayabilir.



Yeni omuz noktalarının uygulanması.

— İnterpolasyonun tatmin edici olmadığı bölgelerde, birbirine yakın noktalar için $h_j = 0$ kullanılarak düzgün doğrular kullanılabilir.

— Sonuç

Buraya kadar anlattıklarımızla, verilen bir nokta setinin elemanları arasında veri interpolasyonu sağlamak mümkündür. Ancak deneme testleri sonunda da görülmüştür ki, estetik görünüm için gösterilen bütün çabalara rağmen üretilen eğri, kâğıt üzerinde yetenekli bir elin düzeyine ulaşamamaktadır. Buradan da anlaşılmaktadır ki, bilgisayar kendini sınırlayan programların kontrolünde olduğu sürece, zekâsının yaratıcı yönünü ve duygularını sanat için kullanan insanın teknik bir yardımcısı olmaktan öteye geçemeyecektir. □