

Say Say Bitmez

Yeri geldiğinde matematik için ne güzel sözler söylediğimi biliyorsunuz. Söylediğinin arkasında mutlaka duran, her söylediğini ispatlayan bir yapı matematik. Böyle olunca da, bilimler içinde ayrıcalıklı bir noktada oturuyor. Matematikçiler de, matematiğin bu eşsiz özelliğine güvenerek, kendilerinden çok emin konuşuyorlar. Bendeniz de öyle, savurdum mu mangalda kül bırakmam.

Aslında işler o kadar da parlak değil. Matematiğin o kadar güvenli bir tarla olmadığını biliyoruz. İçinde yer yer çukurlara rastlamak kaçınılmaz. Bunlardan en kafa karıştırıcı olanının sonsuz kavramı olduğunu kaç kez söyledim sizlere.

Biliyorsunuz sonsuz bir sayı değil. Örneğin birisi için sonsuz varlıklı demek doğru olmaz. Çünkü evrende her şey sonlu. Bir nedenle söylemişim, evrendeki elektronların sayısı bile sonlu!

Diğer taraftan, evrende sonsuz bir şey yoktur demek de doğru değil. Örneğin doğal sayılar kümesinin elemanlarının sayısı sonsuz. Ama dikkat edin, aslında doğal sayılar kümesi sadece matematiğin bir kurgusu. Böyle bir kümeyi ancak sanal olarak gösterebiliriz. Fiziki varlığını göstermek olanaklı değil.

Sonsuz, hem var hem yok özelliğiyle bizimle çok hoş akıl oyunları oynayabilir. Şimdi size böyle bir masal anlatacağım; aklınıza mukayyet olun:

Vaktin birinde, aslı yok ülkesinde bir sihirbaz varmış. Bu sihirbazın çok güzel bir sarayı, sarayının enfes bir bahçesi ve bu bahçede güzelim bir havuzu varmış. Bu havuzda güzel mi güzel bir deniz kızı yaşarmış. Bu sihirbazın hazinesinde sonsuz altını varmış. Bir gün deniz kızıyla bir oyun oynamaya karar vermişler: Sihirbaz havuza iki altın atacak, deniz kızı da bu altınlardan birisini geri sihirbaza verecek, diğeri havuzda kalacakmış. Tahmin ettiğiniz gibi, bu oyunu hazinedeki bütün altınlarla yapacaklarmış.

Şimdi sorumuz şu: Acaba oyunun sonunda sihirbazda ne kadar, deniz kızında ne kadar altın olacaktır?

Dikkatli olun, hemen ilk aklınıza gelen sonucu doğru bellemeyin. Ben de ikisinde eşit sayıda altın olur diye düşündüm başta ama, iş biraz daha karışık:

Varsayalım ki sihirbazın altınları doğal sayılarla bire bir eşleşmiş olsun. Yani, güya altınların üzerinde 1. altın, 2. altın, 3. altın ... şeklinde sayılar olmuş olsun ve altınları birbirine karıştırmayalım.

İlk yol:

Sihirbaz 1 ve 2 numaralı altınları havuza atsın. Deniz kızı dalıp 1 numaralı altını alsın ve sihirbaza geri versin. Sihirbaz 3 ve 4 numaralı altınları havuza atsın; deniz kızı da dalarak 2 numaralı altını bulup sihirbaza geri versin. Üçüncü adımda sihirbaz 5 ve 6 numaralı altınları havuza atsın; deniz kızı da dalıp 3 numaralı altını bulup sihirbaza iade etsin. Böylece oyun sonsuza kadar devam etsin. Göreceğiniz gibi, deniz kızı sırayla bütün altınları iade etmiş olacağı için oyun sihirbazın bütün altınları geri almasıyla sona erecektir.



İnanmazsanız aklınızdan bir altın tutun, ben bu altının ne zaman sihirbaza iade edileceğini hemen söyleyeyim. Örneğin N numaralı altın ne zaman iade edilecek acaba? Sihirbaz 2N-1 ile 2N numaralı altınları havuza attığında, deniz kızı N numaralı altını sihirbaza iade edecektir.

Görünüşte yarı yarıya altınları bölüşecekler derken, hepsinin sihirbaza geri döndüğünü gördük.

Peki ama, deniz kızı oyunu şöyle oynasaydı olmaz mıydı?

İkinci yol:

Gene aynı şekilde başlasın; sihirbaz 1 ve 2 numaralı altınları havuza atsın. Bu sefer deniz kızı dalıp 2 numaralı altını bulsun ve sihirbaza iade etsin, 1 numaralı altın havuzda kalsın. İkinci adımda sihirbaz 2 ve 3 numaralı altınları havuza atsın, deniz kızı da 3 numaralı altını bulup iade ederken 2 numaralı altın havuzda kalsın. Üçüncü adımda sihirbaz 3 ve 4 numaralı altınları havuza atarken deniz kızı 4 numaralı altını bulup iade etsin, 3 numaralı altın havuzda kalsın. Ve böyle sonsuza kadar devam etsinler. Göreceğimiz gibi, sırasıyla bütün altınlar havuzda birikeceği için, sihirbazın hiç altını kalmayacak, deniz kızı ise bütün altınların sahibi olacak.

Aslında hiç de karışık değil: Sonsuzla uğraşıyoruz, bu tür ayak oyunları beklenmeli. Oysa şöyle yapmış olsalar, bakın ne olurdu:

Üçüncü yol:

Sihirbaz gene 1 ve 2 numaralı altınları havuza atsın ama, deniz kızı 2 numaralı altını iade ettikten sonra ikinci adımda 3 ve 4 numaralı al-

tınları havuza atsin, 2 numaralı altını kenara ayırsın. Deniz kızı bu sefer 4 numaralı altını iade edince, 5 ve 6 numaralı altınları havuza atıp 4 numaralı altını kenara ayırsın. Deniz kızı 6 numaralı altını iade edince de 7 ve 8 numaralı altınları havuza atıp 6 numaralı altını kenara ayırmış olsun. Ve oyun böylece sonsuza kadar devam edince, tek numaralı altınların havuzda deniz kızında, çift numaralı altınların ise sihirbazda toplandığını göreceğiz. Böylece ikisinde de sonsuz sayıda altın olacak.

Tuhaf değil mi, başlangıçta sadece sihirbazın sonsuz altını varken son halde hem sihirbazın hem de deniz kızının sonsuz altını oldu. Akıl karıştırıcı gibi duruyor ama üstüne gelerseniz, havuzun kenarında olup biteni hayretle izleyen kurbağa prenze de bir sonsuz altın çıkariveririm görürsünüz!

Bir de şuna bakın:

Bizim Temel ciddi mali sıkıntılar içindedir. Bunu gören iyi kalpli peri yardım etmek ister: "Sana yardım edeceğim. Gece yarısına 1 dakika kala 10 altın vereceğim. Sonra gece yarısına 1/2 dakika kala 10 altın daha, sonra gece yarısına 1/3 dakika kala 10 altın daha vereceğim ve böyle devam edecek. Gece yarısı, istediğinden fazla altının olacak, rahat edeceksin."

Bu tartışmayı duyan kötü ruhlu cadı güzel sözlerle Temel'e yaklaşır: "Perinin sana vereceği her 10 altından bir tanesini bana verisen sana gece yarısı sahip olduğun altının iki katını veririm" der. Temel kabul eder.

Acaba doğru mu yaptı?

Malum, Temellerin çok da zeki olmamak gibi bir ünü vardır ama bakalım bizim Temel öyle mi?

Cadı şöyle plan yapmıştı: "Altınları 1'den sonsuza kadar numaralaysam, ilk 10 altın 1'den 10'a kadar; ikinci on altın 11'den 20'ye kadar ve böyle devam etsin. Peri ilk on altını verdiğinde 1. altını, ikinci on altını verdiğinde 2 numaralı altını, üçüncü on altını verdiğinde 3 numaralı altını ve böylece N. on altını verdiğinde N numaralı altını alırım. Gece yarısı olduğunda Temel'de hiç altın kalmaz, bütün altınlar benim olur. Sıfırın iki katından kim korkar!"

Bu mantığın doğru olduğuna ben tanıklık ederim. Gece yarısı geldiğinde, bizim Temel gene beş parasız mı kalacak yoksa!

Oysa bakın o nasıl hesap yapmış: "Cadı kendini zeki sanıyor; ben ona bir oyun oynayayım da görsün: ilk on altından 1 numaralı altını, ikinci on altından 11 numaralı altını, üçüncü on altından 21 numaralı altını cadıya vereceğim. Ve bu sonsuza kadar bu şekilde devam edecek. Sonunda cadının elinde 1, 11, 21, 31, 41... numaralı altınlar olacak, bende ise gene sonsuz altın. Gece yarısı bana elimdekini iki katını vermek zorunda kalacak!"

Ben bu mantığa da tanıklık ederim. Kesinlikle doğru!

Bunları tebessümle izleyen matematikçi başını sallayıp: "Sonsuzdan sonsuz çıktı kaldı sonsuz, sonsuzu iki ile çarptılar oldu sonsuz! Son defa söylüyorum bırakın şu sonsuzun yakasını, uykunuz kaçacak sonra!" demiş.

İyi demiş hoş demiş ama bir de şuna bakın:

Aslı yok ülkesinde sonsuz odalı iki otel varmış. Aynı caddenin üstünde, karşı karşıya duruyorlarmış. Bir gün, bu otellerin birinde matematikçiler, diğerinde de fizikçiler yıllık kongrelerini düzenliyorlarmış. Sonsuz tane matematikçi gelmiş, otelin bütün odaları dolmuş. Sonsuz tane de fizikçi gelmiş diğer otel de sonuna kadar dolmuş. Aksilik bu ya, akşama doğru fizikçilerin otelinde, elektrik kontağından yangın çıkmış, zavallı fizikçiler eşyalarını zor da olsa kurtarıp sokakta kalmışlar. Karşıdaki otele başvurmuşlar ama aldıkları cevap belli! Yer yok. Bütün odalar dolu. Ne yapalım, ne edelim diye düşünürlerken matematikçiler çareyi bulmuşlar: "Her matematikçi oda numarasına baksın. Sonra da o numaranın iki katı numaralı odaya taşınınsın". Böylece 1 numaralı odadaki matematikçi 2, 2 numaradaki 4, 3 numaradaki 6 numaralı odalara geçmiş ve bu böylece sonsuza kadar sürmüştü. Sonunda görülmüş ki, otelin tek numaralı odaları tamamen boş kalmış ve buralara da fizikçiler yerleşmiş.

Bu matematikçiler zeki oluyorlar demek ki! Ama acaba akıllarına "sonsuz odalı iki oteli karşı karşıya dikmenin ne gereği var; bir tanesi daima yeterlidir zaten" demek gelmiş mi bilinmez!

Bu otele, bu paradoksu kurgulayan ünlü Alman matematikçi David Hilbert adına

Hilbert Oteli deniyor. Kendisini sevgiyle analım burada.

Dediğim gibi:

Sonsuzdan uzak durmak gerek, ama kolay mı!

Sanki yakın durulabilirmiş gibi!

Ben de ne diyorum!

Yeni yılınızı, sonsuz mutluluk getirmesi dileğiyle kutluyorum.

Bak burada sonsuz hiç kafa karıştırmaz değil mi?

