# Cevabı Bulunamayacak Fizik Soruları

Dr. Mahir E. Ocak [ *TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

Avusturyalı matematikçi Kurt Gödel'in 1930'larda yayımladığı "eksiklik teoremi" matematik dünyasını derinden sarsmıştı.

O yıllarda pek çok matematikçi, 1928 yılında David Hilbert tarafından ortaya atılan "karar verme problemi" üzerinde çalışıyordu. Söz konusu matematik olduğunda herhangi bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunun ispatlanabileceği düşünülür. Hilbert de bu düşüncedeydi ve düşüncesinin doğru olduğunun matematiksel yöntemlerle ispatlanmasını istiyordu. Karar verme problemi kısaca şu soruyu sorar:
Matematiksel önermelerin doğru olup olmadığına karar verebilecek genel bir algoritma var mıdır?
Eğer böyle bir algoritmanın var olduğu gösterilebilirse bu durum herhangi bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunun ispatlanabileceği anlamına gelecekti. Fakat Gödel tam sayılarla ilgili doğru ancak ispatlanması imkânsız önermeler olduğunu gösterdi. Eksiklik teoreminden önce matematiksel bir önermenin ya doğru ya da yanlış olduğu düşünülürdü. Gödel ise doğru ya da yanlış olduğuna "karar verilemeyecek" önermeler de olduğunu ispatladı. Böylece karar verme probleminin cevabının olumsuz olduğu da anlaşıldı:
Matematiksel ifadelerin doğru olup olmadığına karar verebilecek genel bir algoritma yoktur.

Yakın zamanlarda yapılan bir çalışmaysa karar verilemeyecek soruların sadece matematikle sınırlı olmadığını gösteriyor. Üç araştırmacı, *Nature*'da yayımladıkları bir makalede temel bir fizik sorusunun karar verilemez olduğunu gösterdi. Peki, bu durum tam olarak ne anlama geliyor?

# Karar Verme Problemi

Her matematik önermesinin ispatı, doğru olduğu bilinen diğer önermelere bina edilerek yapılır. Bu ispatlar zincirinde en temelde yer alan önermelere aksiyom denir. Aksiyomlar, tüm matematiği üzerine kurduğumuz, doğru ve tutarlı olduğunu varsaydığımız, ancak ispatlayamadığımız önermelerdir. Örneğin Öklid, *Elemanla*r kitabında "paralel doğruların kesişmediğini" aksiyom olarak kabul eder. Düzlem geometriyle ilgili pek çok teoremin ispatında bu aksiyomdan yararlanılır. Ancak aksiyomun kendisini düzlem geometrideki diğer aksiyomları kullanarak ispatlamak mümkün değildir. Hatta eğik uzaylardaki geometriler, paralel doğruların kesişmediğini aksiyom olarak tanımlamanın gereksiz olduğunu, bu aksiyomun diğer aksiyomlar kullanılarak ispatlanabileceğini düşünen matematikçilerin beyhude çabalarının sonucudur.

David Hilbert tarafından 1928 yılında ortaya atılan "karar verme problemi", aksiyomlar kullanılarak herhangi bir matematiksel önermenin doğru ya da yanlış olduğuna karar verebilecek genel bir algoritma olup olmadığını sorar. Hilbert'in kendisi böyle bir algoritmanın var olduğunu düşünüyordu. Eğer öyleyse tüm matematiği sağlam temellere oturtmak için "gerekli tüm aksiyomları" tanımlamak yeterliydi. Daha sonra bu aksiyomları kullanarak herhangi bir matematiksel önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına mantık yoluyla karar verilebilirdi.

Karar verme probleminin cevabı olumsuzdur: Aksiyomlar kullanarak herhangi bir matematiksel önermenin doğru olup olmadığına karar verebilecek genel bir algoritma yoktur. Cevabın olumsuz olduğunun anlaşılmasında birkaç önemli gelişmeden bahsedilebilir. Bunlar arasında Kurt Gödel'in eksiklik teoremleri, Alonzo Church ve Alan Turing'in algoritma kavramını tanımlaması ile Alan Turing'in Turing makineleri üzerinden "hesaplanabilirlik" kavramını tanımlaması ve durma problemiyle karar verme problemi arasında ilişki kurması sayılabilir.

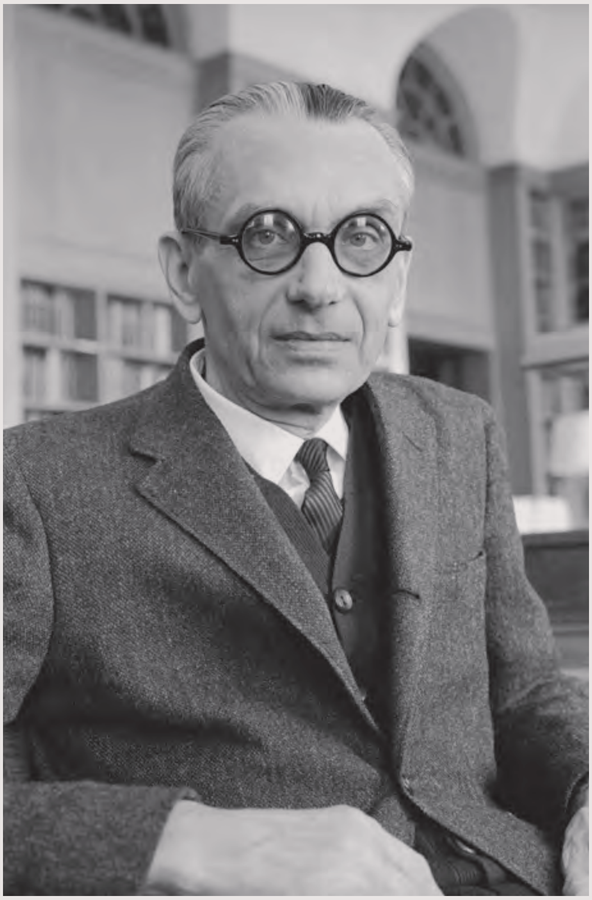
**David Hilbert,** (1862-1943)
Alman matematikçi

Geometriyi bir dizi aksiyoma indirgeyen ve matematiğin biçimsel temellerinin oluşturulmasına önemli katkıda bulunan Hilbert integralli denklemlere ilişkin çalışmalarıyla fonksiyonel analizin 20. yüzyıldaki gelişmesine öncülük etmiştir.

# Eksiklik Teoremi

Gödel'in eksiklik teoremleri tutarlı aksiyom sistemleriyle ilgilidir. Elinizde matematiksel bir önerme varsa ya doğru ya da yanlış olmasını beklersiniz çünkü hem doğru hem de yanlış olamaz. Eğer bir aksiyom sistemi matematiksel önermelerin her durumda ya doğru ya da yanlış olduğunu gösteriyorsa sistemin "tutarlı" olduğu söylenir. Tutarlı aksiyom sistemleri kullanılarak mantık yürütme yoluyla bir önermenin hem doğru hem de yanlış olduğu sonucuna varılamaz.

Gödel'in birinci eksiklik teoremi, herhangi bir tutarlı aksiyom sistemiyle doğal sayıların aritmetiğiyle ilgili tüm doğru önermelerin ispatlanamayacağını söyler. Doğal sayılarla ilgili, doğru ancak ispatlanamayacak önermeler her zaman olacaktır. Gödel'in ikinci eksiklik teoremiyse sistemin kendi tutarlılığını gösteremeyeceğini söyler.



Hilbert'in karar verme problemi açısından asıl önemli olan birinci eksiklik teoremidir. Bu teorem herhangi bir aksiyom sisteminin tüm doğru önermeleri ispatlamak için yeterli olmadığını ifade eder. İlk bakışta, doğru ancak ispatlanamayan önermelerin yeni aksiyomlar olarak sisteme dâhil edilebileceği düşünülebilir. Ancak Gödel'in teoremi daha çok sayıda aksiyom içerecek yeni sistem için de geçerli olacaktır. Dolayısıyla bu daha büyük sistemi kullanarak da mantıksal akıl yürütme yoluyla tüm doğru önermeler ispatlanamaz. Kısacası, hiçbir aksiyomatik sistem tüm doğru önermeleri ispatlamak için yeterli olamayacağı için bir aksiyom sistemini kullanarak herhangi bir önermenin doğru ya da yanlış olduğuna karar verebilecek genel bir algoritma da olamaz. Dolayısıyla Hilbert'in karar verme probleminin cevabı olumsuzdur.

Gödel'in kendisi eksiklik teoremini yalancı paradoksuna benzetir. Birisinin "Bu cümle yalandır" dediğini düşünün. Cümle doğru mudur, yoksa yanlış mıdır? Cümle doğru olamaz çünkü kendisi yanlış olduğunu söylemektedir. Ancak cümle yanlış da olamaz çünkü o zaman doğru olması gerekir. Gödel'in eksiklik teoremiyle başardığı da temel aritmetik kullanarak yalancı paradoksunun bir tür matematiksel versiyonunu oluşturmaktı. Tıpkı yalancı paradoksundaki cümlenin doğru ya da yanlış olduğuna karar verilememesi gibi, Gödel'in eksiklik teoremi de ne kadar yeni aksiyom tanımlanırsa tanımlansın doğruluğuna ya da yanlışlığına "karar verilemeyecek" önermeler olacağını söyler.

**Kurt Gödel,** (1906-1978)
Avusturyalı-Amerikalı mantıkçı, matematikçi
ve matematik felsefecisi

Teoremlerinde tam sayı aritmetiğini içerecek kadar karmaşık herhangi bir sistemin içinde, sistemin aksiyomlarından yola çıkarak doğruluğu veya yanlışlığı kanıtlanamayacak önermeler bulunacağını ispatlamıştır. Bunun için ise Gödel numaralandırması ismi verilen bir metot geliştirmiştir.

Meşhur teoremini Viyana Üniversitesindeki doktora çalışması sırasında 1931 yılında ispatlamış, bununla 20. yüzyıl matematiğinin yönünü değiştirmiştir.

# Turing Makineleri, Hesaplanabilirlik ve Durma Problemi

Alan Turing 1936'da hesaplamanın matematiksel modelini kurdu. Bu modelde, günümüzde Turing makinesi olarak adlandırılan soyut bir makine vardır. Turing makinesi sonsuz uzunlukta bir şeridin üzerindeki sembolleri okur, kendisine verilmiş komutlara göre bilgileri işler ve şeridin üzerindeki sembolleri silerek yenilerini yazabilir. Model her ne kadar basit olsa da ilke olarak modern bilgisayarlar için yazılmış herhangi bir algoritmayı uygulayabilecek bir Turing makinesi üretmek mümkündür.

Bilgisayar bilimindeki temel kavramlardan biri hesaplanabilirliktir. En genel anlamıyla bir soruyu çözebilme yetisini ifade eder. Bir sorunun hesaplanabilirliği, o soruyu çözmek için kullanabilecek bir algoritmanın varlığıyla yakından ilişkilidir. Herhangi bir algoritmayı uygulayacak Turing makinesi kurmak mümkündür. Bu sebeple algoritma kavramının matematiksel tanımı olarak Turing makineleri kullanılır. Bir Turing makinesi tarafından uygulanan sürece algoritma denir.

Alan Turing, 1936 yılında hesaplanabilirlikle ilgili temel bir sorunun "karar verilemez" olduğunu ispatladı. "Durma problemi" olarak adlandırılan bu problem, herhangi bir girdiyi işleyen herhangi bir bilgisayar programının eninde sonunda durup durmayacağını söyleyecek genel bir algoritma olup olmadığını sorar. Bir algoritmayı uygulaya-

**Alan Mathison Turing,** (1812-1954)
İngiliz matematikçi, bilgisayar bilimcisi ve kriptolog

Bilgisayar biliminin kurucusu sayılır.
Geliştirmiş oldugu Turing testi ile makinelerin ve bilgisayarların düşünme yetisine sahip olup olamayacakları konusunda bir kriter öne sürmüştür.

## Turing Makineleri

Alan Turing'in bilgisayar biliminin temellerini atarken tanımladığı soyut Turing makinelerinin çalışma ilkesi gayet basittir. Makine sonsuz uzunlukta olduğu varsayılan bir şeridin üzerine yazılmış girdileri okur ve işler, çıktıları da yine bu şeridin üzerine yazar. Şerit, her biri sadece tek bir sembol içeren ya da boş olan karelere bölünmüştür. Makinenin kafası her seferinde sadece bir kareyi okuyabilir. Okuduğu veriyi işledikten sonra o karedeki sembolü silerek yeniden yazabilir ya da hiçbir şey yapmayabilir. Ayrıca makinenin okuma ve yazma işlemlerini yapan kafa kısmı işlemi tamamladıktan sonra bir birim sağa ya da sola hareket eder.

cak bir Turing makinesi kurduğunuzu ve girdiyi sonsuz uzunluktaki bandın üzerine yazıp makineye verdiğinizi düşünün. Verileri okuyup işlemeye başlayan makine bir süre sonra durup size cevabı mı verir, yoksa sonsuza kadar çalışmaya devam mı eder? Bu sorunun cevabını verecek genel bir algoritma var mıdır? Alan Turing durma probleminin karar verilemez olduğunu, yani herhangi bir iş için üretilmiş bir Turing makinesine herhangi bir girdi verildiğinde makinenin eninde sonunda durup durmayacağını söyleyebilecek genel bir algoritma olmadığını ispatladı.

Durma probleminin karar verilemez olması, bir Turing makinesinin durup durmayacağının hiçbir zaman bilinemeyeceği anlamına gelmez. Örneğin makineye verilen tek komut "Okuduğun veriyi sil ve dur" ise makinenin ilk okuduğu veriden sonra duracağı açıktır. Ya da makineye verilen tek komut "Sıfır yaz ve bir birim sağa kay" ise makinenin sonsuz uzunluktaki bant üzerinde hiç durmadan sürekli sıfır yazarak ilerleyeceği açıktır. Ancak Turing'in ispatı makinenin durup durmayacağına karar verebilecek genel bir algoritma olmadığını söyler. Başka bir deyişle makinenin durup durmayacağını belirlemenin tek yolu makineyi çalıştırıp beklemektir. Eğer makine bir noktada durup size cevabı verirse durduğunu bilirsiniz. Ancak bir süre önce çalıştırdığınız makine hâlâ verileri işleyip çalışmaya devam ediyorsa bir süre sonra durup durmayacağını kesin olarak söyleyemezsiniz. Dolayısıyla durma problemi "karar verilemez" ya da "hesaplanamaz"dır.

Her bir Turing makinesi belirli bir algoritmayı (komutlar dizisini) uygulamak üzere tasarlanır. Her ne kadar makinenin işleyebileceği veri miktarının sonsuz olduğu varsayılsa da makineye verilecek komutların sayısı sınırlıdır. Makinenin hangi durumda hangi komutu uygulayacağının "içsel durumu" tarafından belirlendiği söylenir. Her bir işlemden sonra makinenin içsel durumu değişebilir. Örneğin girdilerin ve çıktıların 1'lerle ve 0'larla kodlandığı durumda bir Turing makinesine verilen komutlar şu şekilde olabilir:

00-> 101 L
01->21 R
100->01 R.DUR

Bu komutlarda küçük puntolarla yazılan rakamlar makinenin içsel durumunu, büyük puntolu rakamlarsa makinenin okuduğu (solda) ve yazdığı (sağda) simgeleri gösteriyor. Komutların sağ tarafındaki R ve L harfleriyse makinenin işlemi gerçekleştirdikten sonra şeridin üzerinde sırasıyla bir birim sağa ya da sola hareket etmesini söylüyor. Dolayısıyla birinci komutta eğer içsel durumu 0'sa ve 0 rakamını okuyorsa, makineye 0 rakamını silip 1 rakamını yazdıktan sonra bir birim sola kayması ve içsel durumunu 10 olarak değiştirmesi söyleniyor. İkinci komutta eğer içsel durumu 0'sa ve 1 rakamını okuyorsa, makineye şeridin üzerinde yazılı simgeye hiçbir işlem yapmadan bir birim sağa kayması ve içsel durumunu 2 olarak değiştirmesi söyleniyor. Üçüncü komutta eğer içsel durumu 10'sa ve okuduğu rakam 0'sa, makineye 0 rakamını silip 1 rakamını yazdıktan sonra bir birim sağa kayması ve içsel durumunu 0 olarak değiştirip durması söyleniyor. Bir Turing makinesi çalışmaya başlarken girdiler kafanın sağındadır. Makine durduktan sonra verdiği sonuçsa kafanın sol kısmında yazar.

Turing makinesinin veri işleyen modern işlemcilerin genel bir örneği olduğu söylenebilir. Gerçek bir bilgisayar tarafından yapılabilecek herhangi bir hesap Turing makineleriyle de yapılabilir. En temel fark, gerçek bilgisayarların aksine, Turing makinelerinin okuyabileceği, işleyebileceği ve yazabileceği veri miktarının sınırsız olmasıdır. Ancak sınırlı zaman içinde bir Turing makinesinin kullanabileceği ve yazabileceği veri miktarı da sınırlıdır.

# Spektral Boşluk ve Karar Verme Problemi

Üç matematikçi *Nature*'da yayımladıkları bir makalede spektral boşluk probleminin “karar verilemez” olduğunu gösterdi. Aynı durum pek çok başka fizik sorusu için de geçerli olabilir.

Spektral boşluk, bir malzemenin temel enerji seviyesiyle ilk uyarılmış enerji seviyesi arasındaki farktır. Bu farkın sonlu büyüklükte olduğu malzemelerin boşluklu, sıfır olduğu malzemelerinse boşluksuz olduğu söylenir. Araştırmacıların bir malzemenin boşluklu ya da boşluksuz olmasının karar verilemez olduğunu göstermek için takip ettiği yöntem hayli karmaşık. Makalenin eklerindeki ispatların toplam uzunluğu yüz sayfanın üzerinde. Kısaca özetlemek gerekirse araştırmacılar önce bir malzeme tasarlıyorlar. Öyle ki malzemenin temel enerji seviyesinde çok sayıda özdeş Turing makinesi kodlanıyor. Makinelerin bir kez çalışmaya başladıktan sonra durması malzemenin boşluklu, durmamasıysa malzemenin boşluksuz olduğunu gösteriyor. Durma probleminin kendisi karar verilemez olduğu için bu durum spektral boşluk probleminin de karar verilemez olduğu anlamına geliyor.

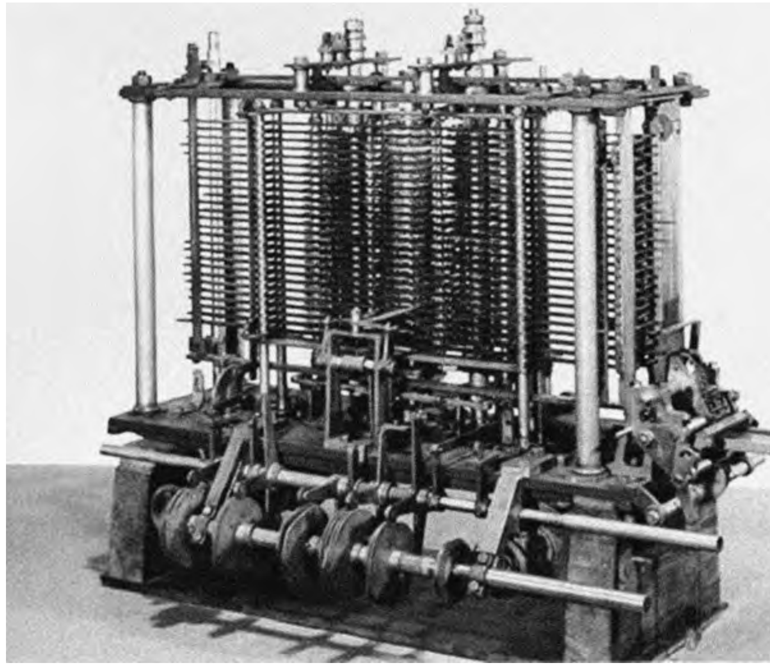
Turing makinelerinin işlemleri nasıl yaptığıyla ilgili birkaç örnek verelim. İşte bir *n* sayısını alarak *n*+1 sayısını hesaplayan bir Turing makinesinin komutları:

00-> 00R, 01-> 11R, 10-> 01R.DUR, 11-> 11R.

Bu Turing makinesinde bir *n* tam sayısı *n* tane ardışık 1 ile temsil ediliyor. Örneğin üç sayısına karşılık gelen girdi 0001110000, beş sayısına karşılık gelen girdiyse 0011111000 şeklinde olabilir. Şeridin sonsuz uzunlukta olduğunu (baştaki ve sondaki sıfırların sonsuza kadar uzandığını), başlangıçta makinenin kafasının girdinin sağ tarafında olduğunu, makine durduktan sonraysa cevabın makinenin kafasının sol tarafında olduğunu unutmayın. Örneğin üç sayısının bir fazlasını hesaplamak için başlangıçta içsel durumu 0 olan makineye 011100 girdisini verelim. Makinenin kafasının okuduğu rakamın altını çizerek gösterirsek başlangıç durumu şudur: $\underline{0}11100$. Makinenin içsel durumu 0 olduğu ve okuduğu rakam 0 olduğu için birinci komutu (00-> 00R) uygular: Makinenin kafası, okuduğu karede hiçbir değişiklik yapmadan bir birim sağa kayar ve içsel durumu da değişmez. Yeni durum $0\underline{1}1100$'dır. İkinci işlemde makinenin içsel durumu 0 olduğu ve okuduğu rakam 1 olduğu için ikinci komutu (01-> 11R) uygular: Makinenin kafası yine okuduğu rakamda bir değişiklik yapmadan bir birim sağa kayar, ancak bu kez işlemden sonra içsel durumunu 1 olarak değiştirir. Yeni durum $01\underline{1}100$'dır. Üçüncü ve dördüncü işlemde dördüncü komut (11-> 11R) uygulanır: Makinenin kafası okuduğu rakamda bir değişiklik yapmadan sağa kayar ve makinenin içsel durumunda bir değişiklik olmaz. Bu iki adımdan sonra durum şudur: $0111\underline{0}0$. Beşinci işlemde makinenin içsel durumu 1 olduğu ve okuduğu rakam 0 olduğu için üçüncü komut (10-> 01R.DUR) uygulanır: Makine okuduğu 0 rakamını silip 1 rakamını yazdıktan sonra bir birim sağa kayar ve içsel durumunu 0 olarak değiştirip durur. Son durum $00111\underline{1}0$'dır. Makinenin kafasının sol tarafında kalan şeritte ardışık dört tane bir rakamı olduğu için cevap 4'tür. Bu örnek hayli basitti, daha karmaşık iki örnekse aşağıda. Bir tam sayının iki katını hesaplayan Turing makinesi:

00-> 00R, 01-> 10R, 10-> 101L, 11-> 11R, 100-> 110R, 101-> 1000R, 110-> 01R.DUR, 111-> 111R, 1000-> 1011L, 1001-> 1001R, 1010-> 101L, 1101-> 1011L.

Araştırmacılar, makalelerinde spektral boşluğun karar verilemez olmasıyla ilgili iki teorem ispatlıyorlar. Birincisi, algoritmik karar verilemezlik: Tüm etkileşimler bilinse bile bir malzemenin boşluklu mu, yoksa boşluksuz mu olduğuna karar verebilecek genel bir algoritma yoktur. İkincisi, aksiyomatik karar verilemezlik: Elinizde tutarlı bir aksiyomlar sistemi olsa bile boşluklu mu, yoksa boşluksuz mu olduğu bu aksiyomlar tarafından belirlenemeyecek malzemeler vardır. Birinci teoremdeki karar verilemezlik durma probleminin karar verilemezliğine, ikinci teoremse Gödel'in eksiklik teoremine benziyor.



Turing Makinesi

Bu makineye de *n* sayısını girdi olarak vermek için bant üzerine *n* tane ardışık 1 sayısı yazılıyor.

İki tam sayının en büyük ortak bölenini hesaplayan Turing makinesi:

00-> 00R, 01-> 11L, 10-> 101R, 11-> 11L, 100-> 10100R, 101-> 110R, 110-> 1000R, 111-> 111R, 1000-> 1000R, 1001-> 1010R, 1010-> 1110L, 1011-> 1101L, 1100-> 1100L, 1101-> 11L, 1110 -> 1110L, 1111-> 10001L, 10000->10010L, 10001-> 10001L, 10010-> 100R, 10011-> 11L, 10100-> 00R.DUR, 10101-> 10101R.

Bu Turing makinesi girdi olarak aralarında bir adet 0 olan ardışık 1'ler alıyor. Örneğin 8 ile 6'nın en büyük ortak bölenini bulmak için makineye girdi olarak üzerinde 0011111111011111000 yazılı bir şerit veriliyor.

Turing makineleriyle ilgili daha çok şey öğrenmek için bu yazıdaki örneklerin de kaynağı olan Roger Penrose'un *Kralın Yeni Usu* kitabını inceleyebilirsiniz.

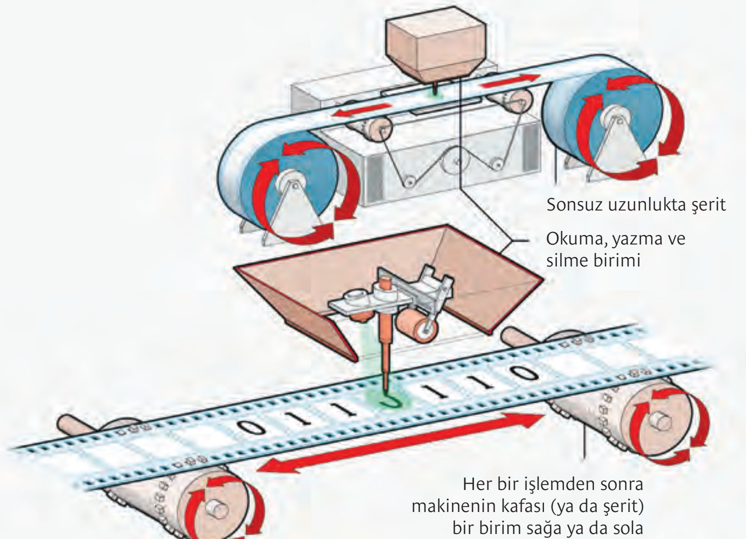
## Turing Makinesi

Makine sonsuz uzunlukta olduğu varsayılan bir şeridin üzerine yazılmış girdileri okur ve işler, çıktıları da yine bu şeridin üzerine yazar.

Şerit, her biri sadece tek bir sembol içeren ya da boş olan karelere bölünmüştür.

Makine çalışmaya başlarken girdiler kafanın sağındadır.

Makine durduktan sonra verdiği sonuçsa kafanın sol kısmında yazar.



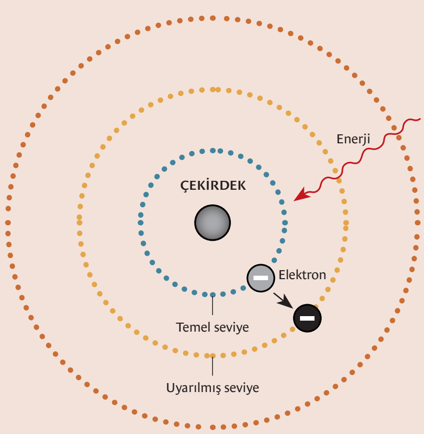
# Spektral Boşluk

Kuantum mekaniğini klasik mekanikten ayıran en temel farklardan biri süreksizliktir. Klasik mekanikte bir nesnenin enerjisi herhangi bir değer alabilir. Ancak maddeye atom ölçeğinde bakıldığında aynı durumun geçerli olmadığı görülür. Örneğin hidrojen atomunda elektronların bulunabileceği belirli enerji seviyeleri vardır. Elektronların farklı seviyeler arasında geçiş yaparken soğurduğu ve yaydığı fotonların enerjilerini ölçerek hidrojen atomunun spektrumu (tayfı) belirlenebilir. Söz konusu tek tek atomlar olduğunda farklı enerji seviyeleri arasında büyük boşluklar vardır. Ancak çok sayıda atomun bir araya gelmesiyle oluşan karmaşık malzemelerdeyse boşluklar daha küçüktür, hatta bazen hiç boşluk yoktur.

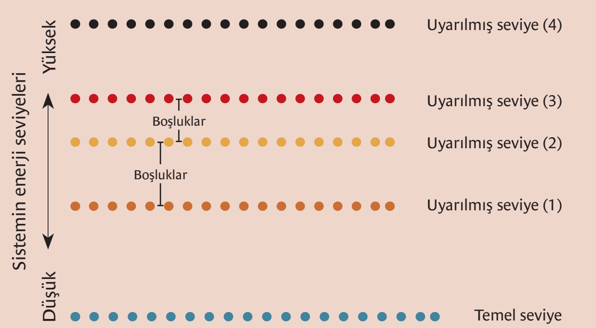
Bir malzemenin temel enerji seviyesi, o malzemenin bulunabileceği en düşük enerjili seviyedir. Bilim insanları, malzemeleri temel enerji seviyelerine indirmek için sıcaklıkları neredeyse mutlak sıfıra düşene kadar soğuturlar. Malzeme dışarıdan enerji aldığındaysa daha yüksek enerjili seviyelere geçer (uyarılır). Temel enerji seviyesi ile birinci uyarılmış enerji seviyesi arasındaki farka spektral boşluk denir. Bazı malzemelerin spektral boşluğu hayli büyüktür. Bazı malzemelerdeyse hiç spektral boşluk yoktur. Malzemenin "boşluklu" mu, yoksa "boşluksuz" mu olduğu özellikle düşük sıcaklıklardaki davranışlarını belirler. Örneğin boşluksuz malzemelerde kuantum faz dönüşümleri gerçekleşirken boşluklu malzemelerde bu gerçekleşmez. Peki, neden?

Faz dönüşümleri sırasında malzemenin özelliklerinde önemli değişiklikler olur. Günlük hayatta aşina olduğumuz erime ve donma gibi faz dönüşümleri malzemenin çevresiyle ısı alışverişi yapmasıyla gerçekleşir. Kuantum faz dönüşümleriyse hiç ısı enerjisinin olmadığı mutlak sıfırda bile gerçekleşebilir. Örneğin bir malzemenin etrafındaki manyetik alan değiştirilerek yalıtkan halden süperiletken hale ya da katı halden süperakışkan hale geçmesi sağlanabilir. Bu ve benzeri faz dönüşümlerinin mutlak sıfırda bile gerçekleşmesi ancak malzemenin boşluksuz olmasıyla mümkündür. Çünkü boş uzayda her daim meydana gelen kuantum salınımlarından ödünç alınacak en ufak miktarda enerji bile malzemenin uyarılmasını ve faz dönüşümü geçirmesini sağlayabilir. Boşluklu malzemeler içinse bu mümkün değildir. Dolayısıyla kuantum faz dönüşümlerinin tam olarak anlaşılabilmesi için malzemelerin hangi koşullarda boşluklu ya da boşluksuz olduğunun belirlenmesi gerekir. Yoğun madde fiziğindeki pek çok başka soru da yine spektral boşluk problemiyle ilişkilidir. Hatta Clay Matematik Enstitüsü'nün çözenlere Milenyum Ödülü'nü vaat ettiği yedi sorudan biri olan "Yang-Mills kütle boşluğu"nun da spektral boşluk probleminin bir türü olduğu söylenebilir. Parçacık hızlandırıcılarda yapılan deneyler, en hafif parçacığın kütlesinin (kütle boşluğunun) sıfır olamayacağına işaret eder. Yang-Mills kütle boşluğu problemi de bu hipotezin kuramsal yöntemlerle ispatlanmasıyla ilgilidir.

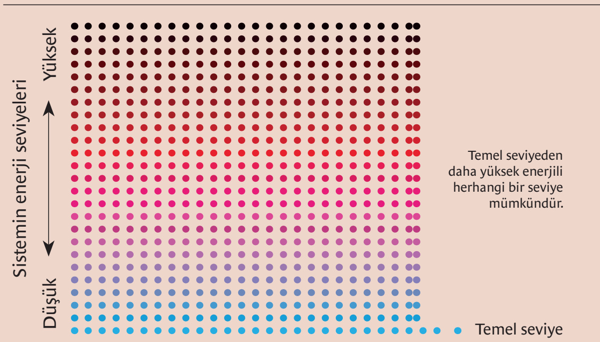
**Spektral Boşluk**
Atomlarda enerji seviyeleri arasında her zaman boşluklar vardır. Ancak çok sayıda atomdan oluşan malzemelerse boşluklu ya da boşluksuz olabilir.

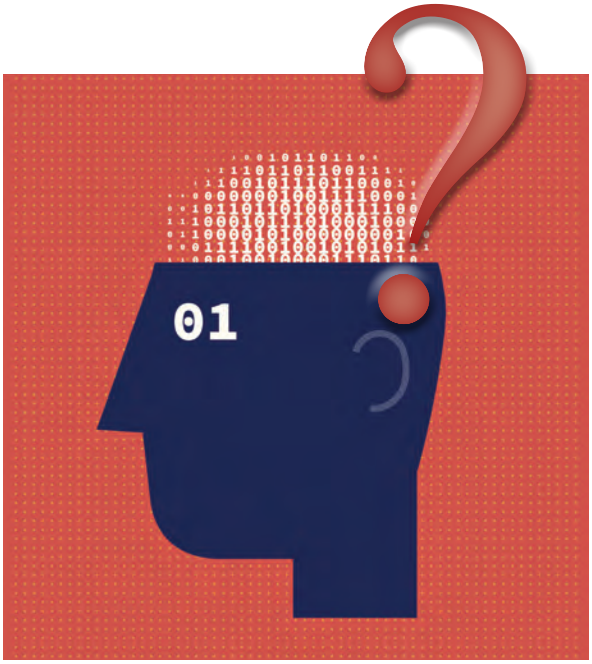



**Boşluklu Sistem**
Enerji seviyeleri arasında boşluklar vardır. Malzemeyi uyarmak için gerekli bir minimum enerji miktarı vardır.




**Boşluksuz Sistem**
Temel enerji seviyesiyle birinci uyarılmış enerji seviyesi arasında boşluk yoktur. En ufak miktarda enerji bile malzemeyi uyarmak için yeterlidir.






## Sonuç

Laboratuvara girip bir malzemenin boşluklu mu, yoksa boşluksuz mu olduğuyla ilgili bir deney yaptığınızı düşünün. Elde ettiğiniz veriler ya spektral boşluğun sıfır olduğunu (malzemenin boşluksuz olduğunu) ya da spektral boşluğun sonlu büyüklükte olduğunu (malzemenin boşluklu olduğunu) söyleyecektir. Peki öyleyse yapılan ispatlara göre spektral boşluk sorusunun (ya da başka herhangi bir fizik sorusunun) karar verilemez olması ne anlama geliyor?

İlk olarak elde edilen sonuçlar, bazı fizik sorularının "genel" çözümünün bulunamayacağını gösteriyor. Ancak tıpkı Turing makinelerinin durma probleminin karar verilemez olmasının belirli bir Turing makinesinin durup durmayacağının hiçbir zaman bilinemeyeceği anlamına gelmediği gibi, bir fizik sorusunun karar verilemez olması da bu türden belirli problemlerin doğru cevabının hiçbir zaman bulunamayacağı anlamına gelmez. Yapılan ispatlar spektral boşluk probleminin tüm malzemeler için çözülemeyeceğini gösterse de belirli malzemeler için doğru cevabı bulmak mümkün. Ancak spektral boşluk problemini çözen genel bir algoritma bulunamaz. Bir sistemin mikro ölçekteki tüm etkileşimleri bilinse bile her durumda malzemenin boşluklu mu, yoksa boşluksuz mu olacağını söylemek mümkün değildir.

Aslında boşluklu ve boşluksuz terimleri, matematiksel olarak, sadece malzeme sonsuz büyüklükte olduğu durumda anlamlıdır. Gerçek hayatta ise hiçbir malzeme sonsuz sayıda parçacık içermez. Makro büyüklükteki malzemeler $10^{23}$ civarında atom içerir. Bu çok büyük sayının pratik amaçlar için neredeyse sonsuz olduğu varsayılabilir. Ancak hangi malzeme için hangi büyüklüğün yeterli olduğu bilinmez. Deneyciler farklı büyüklükte malzemelerle aynı ölçümü yapar, benzer sonuçlar elde ettikleri durumlarda termodinamik limite ulaşıldığını (malzemenin sanki sonsuz büyüklükteymiş gibi davrandığını) varsayarlar. Benzer biçimde bilgisayar benzetimleri yapan kuramcılar da farklı büyüklükteki sistemler üzerinde hesaplar yapar ve benzer sonuçlar elde ettiklerinde termodinamik limite ulaşıldığını varsayarlar. Ancak araştırmacıların yaptığı ispatların bir diğer önemli sonucu, hangi büyüklükte termodinamik limite ulaşılacağının tahmin edilemeyeceği. Spektral boşluk sorusunu ele alalım. Diyelim ki $10^{23}$ civarında atom içeren bir malzeme üzerinde deneyler yaptınız ve boşluklu olduğu sonucunda vardınız. Ancak malzemeye tek bir atom dahi eklendiğinde bile aynı sonucu elde edeceğinizden emin olmanızın bir yolu yoktur. Farklı büyüklükte malzemelerin benzer sonuçlar vermesi termodinamik limite ulaşıldığını göstermez. Benzer biçimde bir kuramcının yaptığı farklı büyüklükteki benzetimlerin benzer sonuçlar vermesi de termodinamik limite ulaşıldığını göstermez. Bu çıkarımın sıcaklık ya da çevresel etkenlerdeki değişimle değil, sistemin büyüklüğündeki değişimlerle gerçekleşen yeni bir tür faz dönüşümüne işaret ettiği de söylenebilir.

Özetle, araştırmacıların yaptığı ispatlar matematiğin yanı sıra fizikte de karar verilemeyen problemlerin var olduğunu gösteriyor. Sadece spektral boşluk problemi değil, başka pek çok fizik sorusu da karar verilemez türden olabilir. ■

**Kaynaklar**

Cubitt, T. S., ve ark., "Undecidability of the spectral gap", *Nature*, Cilt 528, s. 207, 2015.
Cubitt, T. S., ve ark., "The un(solv)able problem", Cilt 319, Sayı 4, *Scientific American*, s. 28-37, 2018.
Penrose, R., *Kralın Yeni Usu*, TÜBİTAK Popüler Bilim Yayınları, Ankara, 2000.