Çerçi

Şahin Koçak

Arşimed Kürenin Hacmini Nasıl Hesapladı?

Newton, Arşimedi ve Apollonius'u çok severdi ve gezegenlerin, bir odağında Güneş'in olduğu elipsler üzerinde döndüklerini, o meşhur eserinde, yaygın ve yanlış kanının aksine, yeni icat ettiği diferansiyel ve integral hesapla değil, eski yunanlı ustaların klasik teoremleriyle ispatlamıştır. Fakat Newton, Arşimed'in kürenin hacmini nasıl keşfettiğini öğrenemeden öldü.

Gauß da Arşimed'e hayrandı ve ona (düzgün yedigen'in çizimine karşı, düzgün onyedigen'in çizimi gibi) nazireler yazdı. Ancak o da Arşimed'in kürenin hacmini nasıl keşfettiğini öğrenemeden öldü.

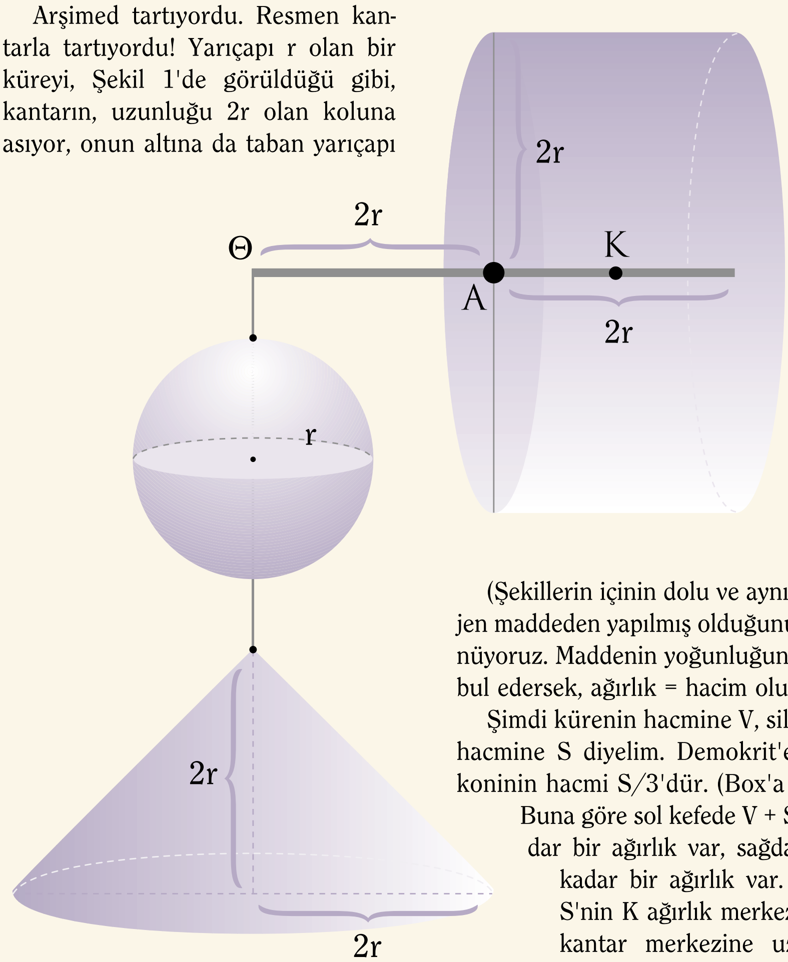
Matematiğin bir infilak çağı olan 19. yüzyılın diğer büyükleri de Arşimed hayranı idiler, fakat onlar da Arşimed'in kürenin hacmini nasıl keşfettiğini öğrenemeden öldüler.

Aslında bütün matematikçiler Arşimed'e hayrandır, fakat onun kürenin hacmini nasıl keşfettiğini öğrenmek, bin yıllık bir aradan sonra, 20. yüzyıl insanlarına nasip oldu, çünkü Arşimed'in bunu anlattığı Metod adlı kitabı, bin yıllık bir kayboluştan sonra, 1906'da Danimarkalı bilim tarihçisi Heiberg tarafından İstanbul'da bulundu!

Bu parşömen, kazınmış, silinmiş, yıkanmış ve üzerine Bizans'lı rahipler tarafından dua metinleri yazılmıştı (öyle şimdiki gibi pırıl pırıl kağıtların üzerine birşeyler karalayıp sonra buruşturup atmak, bizim "lüksümüz"), fakat gene de bir büyüteç ve biraz dikkatle alttaki metnin hemen tamamı okunabiliyordu. (Böyle üstüste yazılmış metinlere *palimpsest* deniyor.) Böylece bütün zamanların en parıltılı keşiflerinden biri gün ışığına çıktı.

Arşimed tartıyordu. Resmen kantarla tartıyordu! Yarıçapı r olan bir küreyi, Şekil 1'de görüldüğü gibi, kantarın, uzunluğu 2r olan koluna asıyor, onun altına da taban yarıçapı 2r ve yüksekliği 2r olan bir koni asıyor ve bu iki ağırlığı, karşı tarafa kantar topuzu gibi taktığı, taban yarıçapı 2r ve yüksekliği 2r olan bir silindirle dengeliyordu.

Şekil 1. Arşimed'in Kantarı

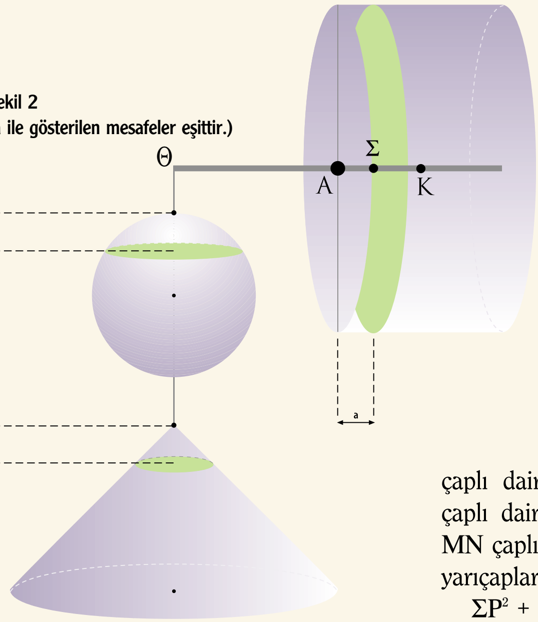


(Şekillerin içinin dolu ve aynı homojen maddeden yapılmış olduğunu düşünüyoruz. Maddenin yoğunluğunu 1 kabul edersek, ağırlık = hacim olur.)

Şimdi kürenin hacmine V, silindirin hacmine S diyelim. Demokrit'e göre, koninin hacmi S/3'dür. (Box'a bkz.)

Buna göre sol kefede V + S/3 kadar bir ağırlık var, sağda ise S kadar bir ağırlık var. Ancak S'nin K ağırlık merkezinin A kantar merkezine uzaklığı,

Şekil 2
(a ile gösterilen mesafeler eşittir.)



diğer ağırlıkların tutturulduğu Θ noktasının kantar merkezine uzaklığının yarısı kadar olduğundan, S ağırlığı diğer ağırlıklar toplamının iki katı olmalıdır.

(Arşimed'in kaldıraç kanunu):

$S = 2\ (V + S/3)$

Buradan $S = 2V + 2S/3$, yani $2V = S - 2S/3 = S/3$ ve $V = S/6$ bulunur. Silindirin hacmi, tabanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğundan,

$S = \pi.\ (2r)^2\ .\ 2r = 8\pi\ r^3$,

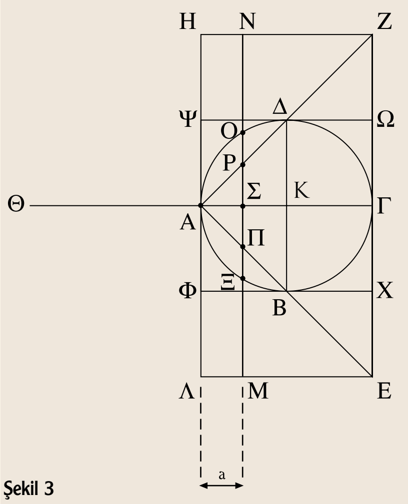
dolayısıyla,

$V = S/6 = 8\pi r^3/6 =$

$\frac{4}{3}\pi r^3$ elde edilir.

Böylece kürenin hacmini bulmuş olduk, ama en önemli noktayı erteledik: Yukarıdaki ağırlıklar birbirini niye dengeliyor?

İlk cevabımız şu: Kürenin, koninin ve silindirin, Şekil 2'de gösterilen ince dilimlerini gözönüne alalım. Bu dilimler birbirini dengelediği için küre ve koni silindiri dengelerler.



Şekil 3

Peki bu dilimler niye birbirini dengeliyor?

Bunun için Arşimed'in o solgun parşömendeki şekline (Şekil 3) bakmamız gerekiyor: Bu şekli ΑΓ ekseni etrafında döndürürseniz, ΑΒΓΔ dairesi küreyi, ΑΕΖ üçgeni koniyi ve ΛΕΖΗ dikdörtgeni de silindiri oluşturur. Küredeki dilimimiz ΞΟ çaplı daireyle, konideki dilimimiz ΠΡ çaplı daireyle ve silindirdeki dilimimiz ΜΝ çaplı daireyle verilir. Daire alanları yarıçapların karesi ile orantılıdır.

$\Sigma P^2 + \Sigma O^2 = \Sigma A^2 + \Sigma O^2 = AO^2$

(Pisagor teoremi)

Diğer yandan, $AO^2 = A\Sigma\ .\ A\Gamma$'dır.

(Bunun için ΑΣΟ ve ΑΟΓ dik üçgenlerinin benzerliğini kullanabiliriz.)

O halde, $(\Sigma P^2 + \Sigma O^2).\ A\Gamma = A\Sigma.A\Gamma.\ A\Gamma = A\Gamma^2.A\Sigma$

ya da, $(\Sigma P^2 + \Sigma O^2).A\Theta = \Sigma N^2.A\Sigma$.

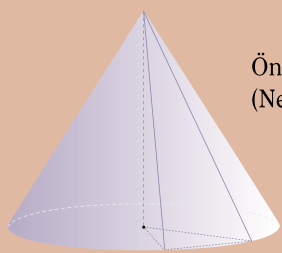
Bu da kaldıraç kanununa göre tam olarak Şekil 2'de soldaki iki dilimin, sağdaki dilimi dengelemesi demektir.

Matematikçilerin Arşimed'e neden hayran olduklarını herhalde şimdi anlıyorsunuzdur. Bu harikulade düşüncenin az kalsın Bizanslı keşişlerin dualarının altında ebediyen kaybolup gideceğini düşünmek, insana tuhaf bir fenalık veriyor.

Arşimed'in Palimpsesti
(Arşimed'in kitabının Kurtuluş Savaşı yıllarında İstanbul'dan kaçırıldığı anlaşılıyor. Gene uzun bir kayboluştan sonra 1998'de NewYork'ta ortaya çıkıyor ve bir müzayedede satışa sunuluyor; Yunan Ortodoks Kilisesinin hak iddiasına ve Yunan hükumetinin de müzayedede bir milyon dolar pey sürmesine rağmen (olayın herhalde bizimle pek alakası yok!) iki milyon dolara, kimliği saklı tutulan, fakat eseri bilimsel araştırmalar için kullandırma taahhüdünde bulunan bir kişiye satılıyor.)

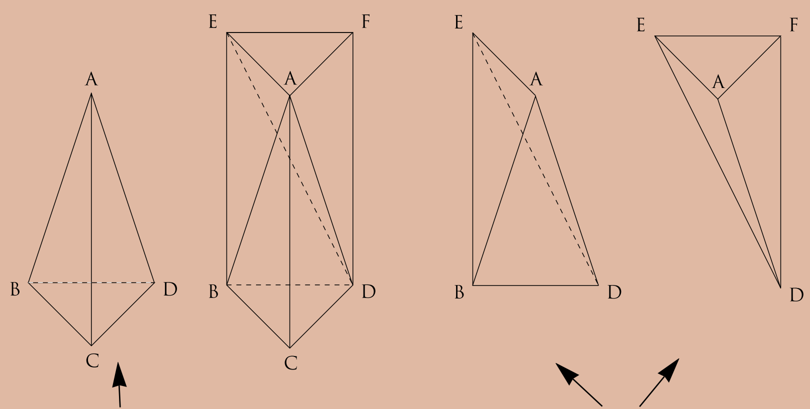
Demokrit Koninin Hacmini Nasıl Hesapladı?

(Muhtemelen aşağıdaki gibi; bu yöntemi daha sonraki Eudoxos'un bildiği kesin)



Önce koniyi küçük üçgen piramitlere bölün. (Ne kadar ince olursa o kadar iyi olur.)

Sonra üçgen piramidin hacmini hesaplayın:



Bu piramitle son piramidin taban alanları ve yükseklikleri aynı.

Bu iki piramidin EBD ve EFD taban alanları ve yükseklikleri aynı.

O halde : Piramidin hacmi = Aynı taban ve yüksekliğe sahip prizmanın hacminin üçte biri
Buradan : Koninin hacmi= Aynı taban ve yüksekliğe sahip silindirin hacminin üçte biri