Matematik Dünyası

Bilkent Matematik Topluluğu

Artık matematiğin de, Bilim ve Teknik'te sürekli bir köşesi var. Bilkent Matematik Topluluğu olarak bazı matematikçilerin danışmanlığında bu köşeyi hazırlamaya çalışacağız. Herşeyden önce burada matematik öğrenmeyi ya da öğretmeyi değil, matematiği bir çok yönüyle tanımayı ve matematiksel düşüncenin ne olduğunu biraz olsun anlamayı amaçlıyoruz. Matematiğin yalnızca ilkokuldan bu yana her sene işlenen, ÖSS'de 45, ÖYS'de 52 sorunun sorulduğu bir ders olmadığını, cebimizdeki parayı saymaktan ya da doğayı formüllerle ifade etmekten ibaret olmadığını, aslında yaratıcı bir sanat olduğunu, her dalında ayrı tat ve güzellikte meyveler yetiştiren ve her geçen gün yeni filizler veren bir ağaca benzediğini göreceğiz, tabii iyi bakarsak. Matematikçilerin Prensi Gauss'un deyimiyle "bilimlerin kraliçesi matematiği" bir kez de bu köşeden selamlıyoruz.

Dikkat Asallar...

Micheal Jordan'ın Asalı

Chicago Bulls'un ünlü oyuncusu Micheal Jordan'ın coğrafya bölümüne geçmeden önce North Carolina Üniversitesi'nde matematik öğrencisi olduğunu biliyor muydunuz? Ama bir kere "bulaşanın" kolay kolay bırakamadığı matematikten Jordan da yakasını kurtaramadı ve henüz aktif spor yaşamındayken bir geri dönüş yaptı. Nasıl mı? Yeni takım numarası olan 45'i, basketbolu bırakmadan önce kullandığı eski numarası 23 ile yani bir asal sayıyla değiştirerek... Ve ortaya şu soruyu atıverdi: "Hoş, bir sayıda ne olabilir ki?"

Aslında Jordan eski Yunanlıların sorduğu sorunun aynısını soruyordu. Onlar da, şu "asal" denen sayılarda bir gariplik görmüşler ve kendi kendilerine bu soruyu sormuşlardı. Ancak asalların "ilginç özellikleri" 18. yüzyıldan başlayarak ortaya çıkmaya başlamıştı. Peki, nedir bu asal sayılar? Hepimizin bildiği gibi, kendinden ve birden başka böleni olmayan doğal sayılardır. Oysa bu basit tanımına rağmen, henüz cevaplandırılamayan pek çok soruya yol açtığından, asal sayılar, sayılar kuramının merkezinde yer almaya devam etmektedir.

Eratosthenes Kalburu

Aklınıza hemen "bir doğal sayının asal olduğunu nasıl anlarız?" diye bir soru gelebilir. İşte Eratosthenes Kalburu, asal sayıları elde etmek izin kullanılan çok eski bir yöntemdir. M.Ö. III. yy. dolaylarında Eratosthenes tarafından ortaya konmuştur ve oldukça da basittir (en azından sahibinin ismini telaffuz etmekten kolaydır). Bu yöntemle $n > 2$ doğal sayısından küçük veya eşit asalları bulmak için 2'den n'ye kadar olan doğal sayıları ardışık olarak bir tabloya dizeriz. Sonra 2'nin kendisinden büyük tüm katlarını listeden sileriz. Ardından, 2'den sonra gelen silinmemiş ilk sayı (yani 3) için aynı işlemi yaparız. Bu işlemi, tabloda silinecek sayı bitene kadar sürdürürsek kalan sayılar (yani silinmemiş sayılar) n'den küçük veya eşit tüm asallardır. (Neden?) Aşağıdaki tablo n=101 için yapılmıştır:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101									

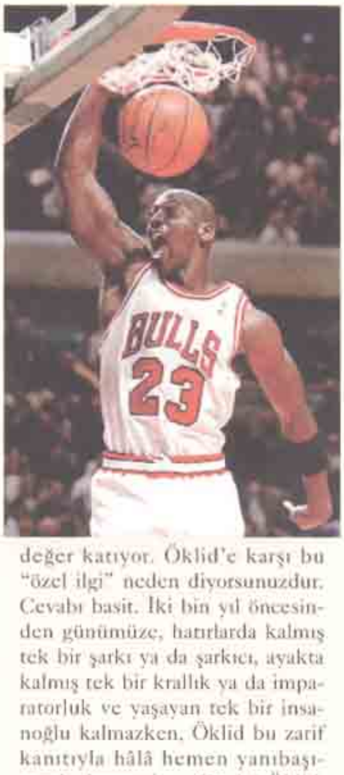
Tabloyu n'nin büyük değerleri için yaptığımızda asalların (düzenli olmasa da) seyrekleştiğini fark ederiz. Hatta zaman zaman asal sayılar arasında öyle geniş aralıklar olur ki artık hiç asal bulunamayacağı düşünülebilir (örneğin, $n!$ ile $n! + n$ arasında hiç asal yoktur, neden?). Oysa gerçekten öyle midir?

Kaç tane asal var?

Cevabı kısa ama sayması biraz uzun: Sonsuz tane...

Kanıt. Asal sayıların sayısının sonlu olduğunu varsayalım ve bu sayıya n diyelim. $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$ olsun. Acaba N asal mıdır? Asalsa, yeni bir asal, $(n + 1)$ inci asal elde etmiş oluruz; değilse N yi asal çarpanlarına ayırabiliriz. Ancak N; $p_1, ..., p_n$ asallarından hiçbirine bölünmez (1 kalanını verdiğine dikkat ediniz). Bu da, N'nin $p_1, ...,$ p_n'den farklı bir asal böleni olduğunu gösterir. Her iki durumda da çelişkiye ulaştığımıza göre asal sayıların sayısı sonlu olmaz.

Bu arada, biraz da kanıtın kendisinden söz edelim. Aslında sonsuz tane asalın varlığı hakkında (asallar gibi sonsuz tane olmasa da) pek çok kanıt yer alıyor. Bunlar arasında Euler'inkinden, Pòlya'nınkine kadar çok farklı yöntemlerin kullanıldığı kanıtları saymak mümkün. Ancak yukarıdaki şu kısacık kanıtın Öklid'e (Euclides) ait olması, ona ayrı bir



değer katıyor. Öklid'e karşı bu "özel ilgi" neden diyorsunuzdur. Cevabı basit. İki bin yıl öncesinden günümüze, hatırlarda kalmış tek bir şarkı ya da şarkıcı, ayakta kalmış tek bir krallık ya da imparatorluk ve yaşayan tek bir insanoğlu kalmazken, Öklid bu zarif kanıtıyla hâlâ hemen yanıbaşımızda duruveriyor. Çünkü Öklid, ortaya anlık bir zevki, heyecanı ya da ihtişamı değil, sadece gerçeği koyuyor.

Öte yandan, Öklid'in kanıtı oldukça kolaysa da, elde ettiğimiz yeni asal hakkında bilgi vermemesi bizi yeni sorulara itmektedir. Her p asalı için, $p\#$ ile, $q \leq p$ olmak üzere tüm q asallarının çarpımını gösterelim. Bu durumda, Dubner'in 1987 yılında sorduğu ve cevapları henüz bilinmeyen şu sorular karşımıza çıkıyor:

$p\#+1$'in de asal olduğu sonsuz sayıda p asalı var mıdır?

Ya da $p\#+1$'in asal olmadığı sonsuz sayıda p asalı var mıdır? (Ne dersiniz?)

Formül aranıyor!

Amatör ya da profesyonel, hemen her matematikçinin asallarla ilgili sorduğu bir soru vardır: "Belirlenmiş bir limiti, örneğin; bir milyarı ya da x'i aşmayan kaç tane asal sayı vardır?" Daha açık soracak olursak; x'i aşmayan asalları $\pi(x)$ ile gösterirsek, x sonsuza giderken, $\pi(x)/f(x)$ oranı 1'e yakınsayacak, yani $\pi(x) \sim f(x)$ olacak şekilde kolay bir formülle ifade edilebilecek bir $f(x)$ fonksiyonu var mıdır?

G.F. Gauss,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

olduğunu ileri sürmüş ama tam bir kanıt verememiştir. Aslında bu savın kanıtlanması, çözümü bulunana dek "Sayılar Kuramı" içinde çok önemli bir yer işgal etmiştir. Hatta öyle ki, bu savı kanıtlayacak olanın ölümsüzleşeceğine dair bir inanç matematikçiler arasında yayılıvermiştir.

Ve sonunda, 1896 yılında, tek değil, iki seçkin analizci, Hadamard ve de la Vallée Poussin tarafından hemen hemen aynı zamanda ve birbirinden bağımsız olarak savın kanıtı ortaya konulmuştur. Bu, ünlü "Asal Sayı Teoremi" dir. Elbette, bu iki matematikçi ölümsüz varlıklar haline gelmemiştir, ama eski Yunan efsanesinde ifade edildiği gibi, "hemen hemen ölümsüz" olmuşlardır. Hadamard 98. yaşgününü görmüş, de la Vallée Poussin ise, iki yıllık bir farkla 96 yaşına kadar yaşamıştır.

Daha sonra, 1949 yılında, yine iki matematikçi tarafından ve birbirinden bağımsız olarak, bu teoremin ileri tekniklere dayanmayan kanıtları ortaya konmuştur. Bu çok önemli çalışmalar, Selberg'e "Fields Madalyası"nı, Erdös'e ise "Wolf Ödülü"nü kazandırmıştır.

Asallar Üzerine Değişik Yorumlar

Çeşitli bölümlerde okuyan öğrenciler aşağıdaki önermeyi kanıtlamaları istenmiş..

"1'den büyük tüm tek sayılar asaldır."

Verilen cevaplar şöyledir:

Mühendis: "3 asal, 5 asal, 7 asal, önerme doğru."

Bilgisayar bilimcisi: " 3 asal, 5 asal, 7 asal, 7 asal, 7 asal, ..."

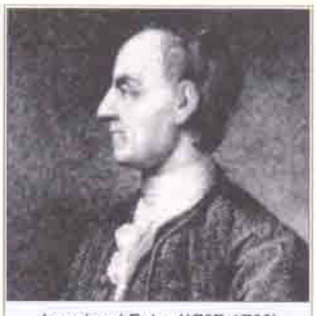
Fizikçi: "3 asal, 5 asal, 7 asal, 9 deney hatası, 11 asal..."

Matematikçi: "3 asal, 5 asal, 7 asal, 9 asal değildir. Bir karşı örnek bulduğumuza göre önerme yanlıştır."

Felsefeci : "Sayı nedir?"

Hâlâ şansınız var

Bu başlığı okuyup, siz de merak ettiyseniz hemen cevaplayalım: Andrew Wiles'ın çıkıp Fermat'nın Son Teoremi'ni kanıtlayarak elimizden bütün eğlenceyi almasından sonra, hâlâ sizin de yeni bir Andrew Wiles olmak için şansınız var. Hem de bir değil, pek çok şansınız var. Ama bu seferlik yalnız birkaçını ele alalım. İlk şansınızı Christian Goldbach'a (1690-1764) borçlusunuz. Matematiğin çözülememiş gizemlerinden biri olan ve de çokça bilinen Goldbach'ın savını bir de bu satırlarda tekrarlayalım:



Leonhard Euler (1707-1783)
"Matematikçiler asal sayılar dizisinde bir düzen keşfetmeye boşuna uğraşıp duruyorlar. Bunun, insan zihninin asla nüfuz edemeyeceği bir sır olarak kalacağı konusunda pek çok nedenimiz vardır."

"İkiden büyük her çift sayı iki asalın toplamı biçiminde yazılabilir" diyor Goldbach Euler'e 1742 yılında yazdığı mektupta...(Artık siz düşünün, Euler'in uykusuz gecelerini...) Göründüğü kadarıyla Goldbach'ın savı gerçekten doğru, ama tekrar ediyoruz, "göründüğü" kadarıyla. Bu savın 20 000 000 000'dan küçük bütün çift sayılar için doğruluğu kanıtlanmış. Ama yalnız bu kadarı...

Öte yandan Goldbach, bununla da yetinmemiş, biri çıkar da kanıtlayıverir diye ortaya bir sav daha atmış: "7'den büyük her tek sayı 3 asal sayının toplamı olarak yazılabilir." 1937'de Vinogradov yeterince büyük sayılar için bu savın doğruluğunu kanıtlamıştır, burada yeterince büyük sayı olarak $3^{3^{15}}$ sayısının alınabileceği gösterilmiştir. Ancak gerisi, yani, 7 000 000'un üstünde basamağa sahip olan bu sayının altındakiler için matematiksel bir kanıt yoktur. Fakat, ileride gelişmiş bilgisayarlar kullanılarak bu sayılar kontrol edilebilir.

Goldbach'ın bu savlarının yanısıra, bir de Mersenne asalları ile ilgili bir sav yer alıyor. Hemen belirtelim; 2^n-1 şeklinde yazılabilen asallara "Mersenne asalı" adını veriyoruz. Açıkta olan soru ise, sonsuz sayıda Mersenne asalının olup olmadığı. Aslında şu anda bilinen sadece 33 adet Mersenne asalı bulunuyor. Bunlardan en büyüğü - ki aynı zamanda en büyük asal- 1994 yılında bulunan $2^{859433}-1$ sayısı. Ama şu ana kadar sadece 33 asalın bulunması, matematikçileri bu savı kanıtlamaya çalışmaktan alıkoymuş değil.

Son olarak, bahsedeceğimiz açıkta kalmış soru ise, ikiz asallarla ilgili sav. p ve $p+2$'den, eğer her ikisi de asalsa bunlara "ikiz asal" denir. Soru ise aynı; Acaba sonsuz tane ikiz asal bulunuyor mu? Gerçi bunun güçlü bir şekilde doğru olduğunu gösteren bir yorum var (ki bu yorumu öğrenmek için "Sayılar Teorisi dersi alınız" diyerek merakınızı belki arttırmak mümkün olabilir), ancak halen tam bir kanıt sunulamamıştır.

Fakat, her ileri sürülen sav açıkta kalmıyor, hatta bazılarının doğru olmadığı bile kanıtlanabiliyor. Örneğin, Fermat (1601-1665), $F=2^{2^n}$ şeklindeki her sayının asal olduğunu ileri sürmüştü, ancak Fermat'nın ölümünden yıllar sonra $n=5$ için Euler, $F = 4\ 294\ 967\ 297$ sayısının 641 ile 6 700 417'nin çarpımına eşit olduğunu kanıtlayarak bu savı çürütmüştür.

En büyük kim?

Şimdi de sıra büyük asallarda. Büyük asallar şifrebiliminde (kriptoloji) büyük öneme sahiptir. Çünkü büyük asallar kullanılarak çözülmesi zor, güvenli şifreler yapılabiliyor.

Bazı büyük asallardan söz edelim. 11'in asal olduğunu biliriz ve tüm basamakları 1'den oluşur. Ancak bahse gireriz ki altta yazılı olan sayının asallığı hakkında bu kadar kolay bir yorum yapamazsınız:

$$\frac{10^{1031}-1}{9}=11\ \ldots\ 11$$

Bu sayının ünü ise tam basamakları 1 olan en büyük asal olmasından ileri geliyor. Burada tam 1031 tane 1 vardır.

Bir de simetrik olan şu asal var:

$$(10^{5004}+1232321)\cdot10^{4998}+1$$
$$=10\ \ldots\ 012323210\ \ldots\ 01.$$

Üşenip de (?!) yazmadığımız her iki kısımda ise tam 4997 adet "0" bulunuyor.

Tabii, yazımızda da bahsettiğimiz ikiz asalları unutmamalıyız. Bunlardan bilinen en büyük 11713 basamaklı şu sayılardır:

$$242\ 206\ 083\cdot2^{38880}-1 \text{ ve}$$
$$242\ 206\ 083\cdot2^{38880}+1$$

...ve son olarak

$$7532\cdot\frac{10^{1104}-1}{10^4-1}$$

sayısı da "tüm basamakları" asal olan, bilinen en büyük asal sayı! Gerisini bulmak size kalmış.

Kaynaklar
Thema Larousse- cilt 3, Milliyet, İstanbul, 1993-1994.
Joel Chan-Prime Time! / Math Horizons Şubat 1996.
Ellen Gethner- In Prime Territory- / Math Horizons Nisan 1996.
Paulo Ribenboim, The Little Book of Big Primes, Springer-Verlag, New York, 1991.
"En büyük kim?" konusunu daha fazla yazıt bulmak isteyenler aşağıdaki internet adreslerini deneyebilir:
web: http://www.utm.edu/research/primes/largest.html
gopher: unix1.utm.edu: directory 1/user/Public_FTP/pub/math/primes
ftp: math.utm.edu; directory/pub/math/primes

Çözmece

Bu bölümde sizlere çok kolay olmayan, fakat ilginç ve kısa çözümleri olan bazı sorular soracağız. Çözümleri bir sonraki sayıda yayınlayacağız. İlginç bulduğunuz çözümleri ve fikirleri bize iletebilirsiniz. Bu sayıdaki sorularımız:

1. p asal, n ve k tam sayılar ve

$0 \le k \le p^n-1$ olmak üzere

$$\binom{p^n-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$$

denkliğini gösteriniz.

2. Aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}$$

Problem Seminerleri

TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'nun matematik alanında düzenlediği problem seminerleri Mart 1995'te başlamıştı. Bu zamana kadar 3 dönemde toplam 21 problem semineri gerçekleştirildi. Problem seminerleri bu dönem de dergimizde yayınlanacaktır. 1996 İlkbahar döneminde problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara toplam 72 kitap ödülü verilmiştir. Toplam puana öre ilk sırayı 44 puanla Bilkent Matematik Bölümü öğrencilerinden Mehmet Arafat Şahin elde etmiş ve dönem birincilik ödülüne hak kazanmıştır. Bu dönemde de problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara çeşitli ödüller verilmeye devam edilecektir. Ödüle hak kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümlerin, ilgili problem seminerinin başlamasından önce postayla ya da elden Problem Seminer Grubu'na iletilmiş olması gerekmektedir.

Ödül kurallarına göre, her seminerdeki dört problemden birincisi 1, ikincisi 2, üçüncüsü 3, dördüncüsü ise 5 puan değerindedir. Her doğru çözüm için problemlerin zorluk derecelerine göre çeşitli ödüller verileceği gibi, bu dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30'un üstünde olmak koşuluyla, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Ödüle hak kazananların isimleri, dergimizde ilan edilecek; ilginç çözüm ve yaklaşımlar, her dönem sonunda yayınlanacak Problem Seminer Kitabına dahil edilecektir.

Matematik Problem Seminerleri, 1996 Sonbahar Döneminde de Ankara'da "TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı , No. 221 Kavaklıdere" adresinde yapılacaktır.

Problem Seminerleri 96/9
9 Ekim 1996, Çarşamba, Saat: 15:30-17:30

1. $|BC| = a$ uzunluğu, iç teğet çemberinin yarıçapı r ve A köşesinin karşısındaki dış teğet çemberinin yarıçapı r_a verilen ABC üçgenini çiziniz.

2. BC kenarının orta noktası M_a, A köşesinden BC kenarına inilen dikme ayağı H_a ve iç teğet çemberinin merkezi I verilen ABC üçgenini çiziniz.

3. İç teğet çemberinin merkezi I olmak üzere, iç teğet çemberinin yarıçapı r ve

$$\frac{|IA|}{|IB|}=\frac{|ZX|}{|ZY|}$$

olacak şekilde bir $[XY]$ doğru parçası ile bu doğru parçası üzerinde bir Z noktası verilen, tepe noktası A olan ABC ikizkenar üçgenini çiziniz.

4. D üçgenin iç bölgesinde olmak üzere,

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA}) = \alpha$ açısı,

$|BC| = a$ uzunluğu ve $\widehat{B}$ açısı verilen ABC üçgenini çiziniz.

Problem Seminerleri 96/10
23 Ekim 1996, Çarşamba, Saat: 15:30-17:30

1. n sıfırdan büyük bir tam sayı ve $i = 1,\ldots, n$ için $x_i \ge 0$, $\alpha_i > 0$ olsun.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1 \quad \text{ise} \quad \prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

olduğunu kanıtlayınız.

2. a ve b sıfırdan büyük gerçel sayılar olmak üzere

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

olduğunu kanıtlayınız.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sıfırdan küçük olmayan gerçel sayılar olsun. $n>3$ ve $i = 1,2,\ldots, n$ için

$$A_i=\frac{x_1+\ldots+x_n-x_i}{n-1}, \quad G_i=\left(\frac{x_1\ldots x_n}{x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

olmak üzere,

$$\frac{G_1+\ldots+G_n}{n}\le(A_1\ldots A_n)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $i \ne j$ olmak üzere olmak üzere x_ix_j çarpımlarının birbirine eşit olduğu durumda sağlandığını kanıtlayınız.

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sıfırdan büyük gerçel sayılar olsun. $i = 1,2,\ldots, n$ için

$$A_i=\frac{x_1+\ldots x_i}{i}, \quad G_i=(x_1\ldots x_i)^{\frac{1}{i}}$$

olmak üzere

$$\frac{G_1+\ldots+G_n}{n}\le(A_1\ldots A_n)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $x_1=x_2=\ldots=x_n$ durumunda sağlandığını kanıtlayınız.

Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir:
TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu
Matematik Problem Seminerleri
Atatürk Bulvarı No. 221 06100 Kavaklıdere-Ankara