

# Zıplayan Kâğıt Kurbağalarla Matematiksel Deneyimler

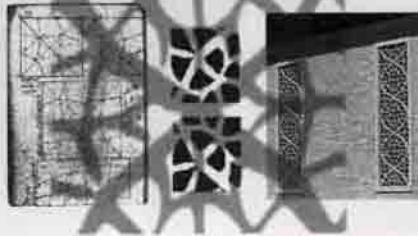
Origami sözcüğü, bana hep zıplayan kâğıt kurbağaları hatırlatır: İlkul sıralarında elişi kâğıtlarından yaptığımız o zıplayan kurbağaları... Ancak sözkonusu kurbağaların, arkadaşlarımın yaptığı zıplayan kurbağalar olduğunu belirtmekte yarar var, çünkü benim yaptıklarım hiçbir zaman zıplamamıştı. Zaten yaptığım kâğıt gemiler de batır, uçaklarım en kısa sürede yere düşme becerisini gösterirdi. İşte bu elişi dersleri daha o günlerde, benim mühendislik kariyerimi noktalamıştır. Öte yandan aynı kâğıt kurbağalarla (en azından bildiğim kadarıyla) yaşadığım hiçbir matematiksel deneyimim yoktu. "Hâl böyleyken, bu başlığı kullanmak da nereden aklına geldi?" dersiniz, onun da yanıtı hazır: Benim kâğıt kurbağalarımın matematikle pek arası olmamakla beraber, origamiyle insanlığın matematiksel deneyimleri onüç yüzyıl öncesine kadar dayanıyordu. Hem de bu deneyimler, yalnızca katlanmış kâğıt parçaları arasına saklanmakla kalmayıp tahtada, çelikte, toprakta da hayat buluyor ve günümüze ulaşmayı başarıyorlardı. Nasıl mı?

## Kâğıt Katlama Sanatı: Origami

Çin'de kâğıdın icat edildiği tarih olduğuna inanılan M.S. 1. yüzyıldan bu yana, insanlar kâğıdı katlayıp ona

çeşitli biçimler vermeyi hep sevmişlerdir. Öyle ki Çinliler'in daha o yıllarda geliştirdikleri kimi kâğıt katlama teknikleri, bugün bile kullanılmaktadır. Kâğıt, altıncı yüzyılda Budist rahipler tarafından Japonya'ya götürüldüğünde, oradaki kültürün de bir parçası olmayı başarmıştır. Japonların mimarilerine, Şinto dininin gereği olan günlük törenlerine giren kâğıtla beraber, onu katlama sanatı da önemli bir yer edinmiştir. Önceleri *orikata* adı verilen bu sanat, 1880'den itibaren *oru* (katlamak) ve *kami* (kâğıt) sözcüklerinden türetilen *origami* adıyla anılır olmuştur.

Öte yandan, kâğıt katlama teknikleri Endülüs'te de (İspanya) kendine yer bulmuştur. Araplar kâğıt yapma sırtını sekizinci yüzyılda Kuzey Afrika'ya taşırlarken, Mağribiler



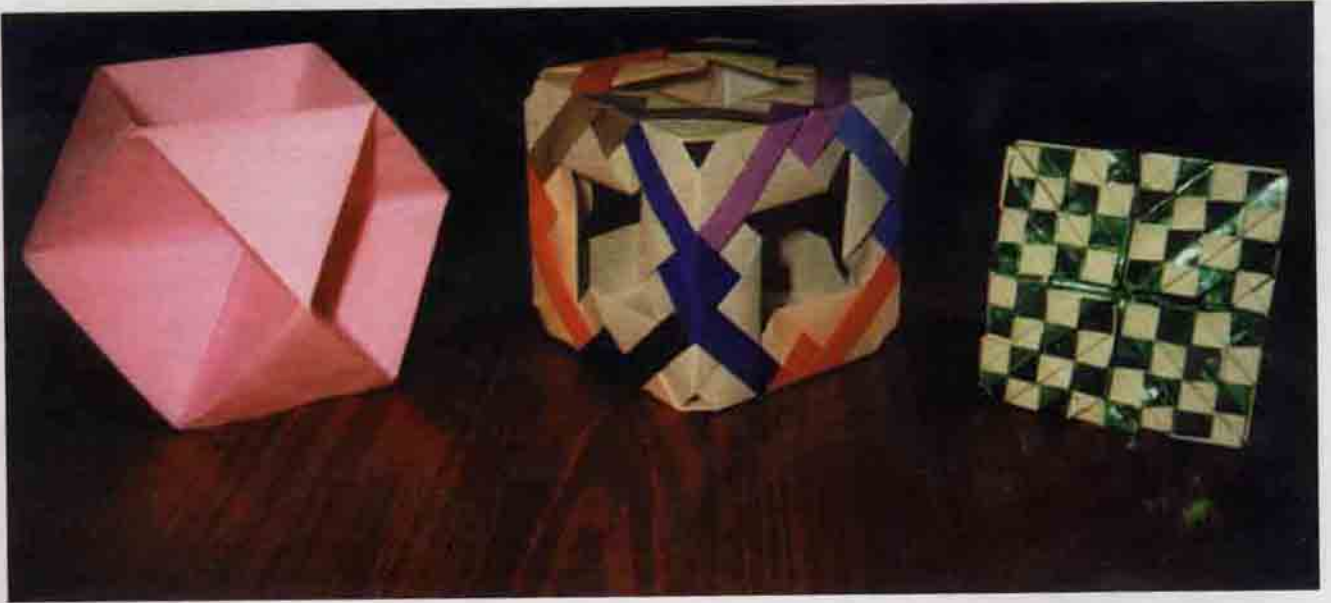
Yüzyıllardan beri küçük eller, rengârenk kâğıtların arasında kayboluyor ve bir yolcuyla gizemli dünyalara dalyorlardı. O yolcu İpek Yolu'nun yolcusuydu. Çin'i görmüş, Japonya'ya yelken açmıştı. Araplarla Kuzey Afrika'nın kum tepelerinden geçerek Pirene Dağları'nın eteklerine ulaştı. Mağribilerin yanında matematikle tanıştı. Sonra mı?..



de aynı sırtı İspanya'ya götürmüşlerdir. Ancak Mağribiler için kâğıt katlamak, çeşitli şekillerin elde edildiği bir sanat malzemesi değil, geometri çalışmalarının bir aracı olmuştur. Bu çalışmalar, mimari etkinliklerine de yansımış ve kâğıt katlanarak elde edilen geometrik şekiller, meydana getirilen eserlerde, kendilerine önemli oranda yer bulmuşlardır. Bu Mağrip ya da Endülüs mimari stili onikinci yüzyıl boyunca etkisini korumuş ve günümüzde de, örneğin; Teksas Üniversitesi'nin Austin Kampüsü'nde yer alan pek çok yapıya yansımıştır.

Yakın dönemin mimarları ve sanatçıları da origami ve onun ortaya çıkardığı pek çok şekilden etkilenerek eserlerinde kullanmışlardır. 1930'lu yıllarda, ünlü bir Alman sanat ve dizayn okulu olan Bauhaus'ta, *Laszlo Moholy-Nagy* öğrencilerine kâğıt katlama alıştırmaları yaptırarak fonksiyonel dizaynı öğretmeye çalışmıştır.





Origaminin etkisi göz alıcı mimari yapıların yanısıra ev eşyaları ve mobilyalara da yansımıştır. *Dansk*, origamide katlamaların ortaya çıkardığı basit biçimlerden etkilenerek, paslanmaz çelikten ev eşyaları dizayn ederken, *Dakota Jackson*'ın origami sandalyesi de *1996 Britannica Book of the Year*'da 1995 mobilya sanayisini örnekleyen tek eser olmuştur. Altında ise, onun "yenilikçi teknolojiyi temsil ettiği ve 21. yüzyılı bekleyen bir stil ortaya koyduğu" yazılıdır. Yani origami 12. yüzyıldaki etkinliğini 21. yüzyıla taşıırken zıplayan kâğıt kurbağaların çok ötesinde bir alana da adını yazdırmaktadır.

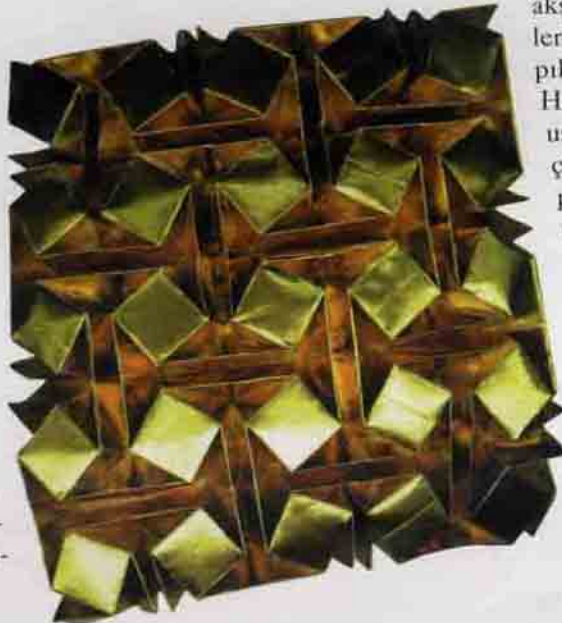


len yanıtlanamamış bu soruyu sorarken karşılaştırmak için ilk başvurdukları kaynağa, yalnız cetvel ve pergelle çizilebilen geometrik şekillerdir. Cetvel ve pergelle yapılabilen çizimlerle, neyi kastettiğimize gelince... Gelin, pek çoğumuzun okul sıralarında tanıştığı ve aklımızın biraz tozluca bir rafına kaldırdığı (en azından benim) bu çizim tekniğini birlikte hatırlayalım. Öncelikle burada, cetvel sözcüğüyle yalnızca düzgün bir kenarın ifade edildiğini not düşmek gerekir. Yani üzerinde hiçbir ölçü birimi bulunmayan, herhangi bir eşyanın düzgün bir kenarı... İşte yalnızca bu düzgün kenar ve pergelle, herhangi bir kişi, iki noktayı birleştiren bir doğru çizebilir,

çeşitli çemberler yaratabilir ya da açılar ikiye bölüp dik doğrular oluşturabilir. Aslında, cetvel ve pergelle yapılabilen tüm bu çizimler bir dizi adımdan oluşur. Bu adımlarsa şöyledir:

- İki nokta verildiğinde, bunları birleştiren bir doğru çizebiliriz.
- İki (paralel olmayan) doğrunun kesiştikleri noktayı belirleyebiliriz.
- $p$  noktası ve  $r$  uzunluğu verildiğinde,  $p$  noktasını merkez alan  $r$  yarıçaplı bir çember çizebiliriz.
- Bir çemberin bir başka çember ya da doğruyla kesiştikleri noktaları tespit edebiliriz.

İşte bu aksiyomlar, bizim cetvel ve pergelle yapabileceğimiz tüm eylemlerin sınırlarını da çizer. Yani cetvel ve pergelle yapılabilen herşey, aslında yukarıda sözkonusu edilen basit adımlarla gerçekleştirilir. Aynı aksiyomlar kullanılarak, elbette, nelerin cetvel ve pergelle yardımıyla yapılamayacağını da söyleyebiliriz. Herhangi bir açıyı üçe bölmek ya da uzunluğu  $2^{1/3}$  birim olan bir doğru çizilemek, bizim yalnız cetvel ve pergelle kullanarak gerçekleştiremeyeceğimiz örneklerdendir. Bu örnekler ilk dile getirildiğinde, genellikle hemen herkesin yaptığı, kalem kâğıda sarılıp bir açıyı üçe bölmeye ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizmeye uğraşmaktır. Hatta olayın bazen inatlaşmaya vardığı; sırf açıyı bölmüş olmak için cetvel ile pergelin tanımının tartışıldığı bile olur. Kimi zaman ise



## Demokratik İspatlar

Origami, büründüğü gizemli şekillerle, sanatçıların ve mimarların ilgisini çekerken matematiğin soyut dünyasından da uzak kalmamıştır. Geometrik çizimlerde, fraktal eğrilerin kendi özgün yapılarında, cebirde kendine yer edinen origami, kafa kurcalayan pek çok soruyu da beraberinde getirmiştir. Örneğin; matematikçiler için ilgiye değer bir soru da, origamiyle hangi şekillerin yapılmasının mümkün ve hangilerinin yapılmasının imkânsız olduğudur. Ha-



"Demokrasilerde çare tükenmez." prensibiyle, oylama yoluna gidilir. Ama matematiğin demokrat olduğunu kim söylemiş ki?

Tüm bunların origamiyle ne ilgisi olduğuna gelince... *David Auckly* ve *John Cleveland* da aynı soruyu kendilerine sormuşlar ve yayınladıkları makalelerinde bir takım ispatların ardından şu sonuca ulaşmışlar:

"Origamiyle yapılabilen herşey, cetvel ve pergeli kullanarak da yapılabilir. Ama bu ifadenin tersi doğru değildir."

Yukarıdaki bu ifadeyle tüm sorunlar çözümlenmiş ve origamiyle yapılabilenlerin sınırları çizilmiş gibi gözüktü de, origaminin bize bir sürpriz yapmadığı söylenemez. Çünkü origamiyle bir açıyı üçe bölmek ya da  $2^{1/3}$  birim uzunluğunda bir doğru elde etmek mümkündür. Şimdilik sözkonusu örneklerle uğraşımızı biraz erteleyerek; gelin, önce bu mantık açmazından kurtulalım. Aslında sorun, basit bir sebepten; origamiyi tanımlayan aksiyomlardan doğmaktadır. Yukarıdaki sonuca ulaşan yazarlar, origamiyi "beş aksiyom" kullanarak tanımlamışlardır. Bu aksiyomlar oldukça basittirler ve hepsini de cetvel ve pergeli yardımıyla elde etmek mümkündür. Yani tam yukarıda ifade edildiği gibi... Oysa bu aksiyomlar, origamiyle yapılabilen tüm katlama işlemlerini içermezler. Diğer bir deyişle, yazarların listesinde eksik kalmış bir (ya da belki de birden fazla) aksiyom daha vardır. İşte bu aksiyomla, cetvel ve pergelin yapamadığı, açıyı üçe bölmek ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizebilmek mümkün olur. Yani origami, henüz matematikçilere pes etmiş değildir.

## Huzita'nın Origami Aksiyomları

Aslında kâğıt katlama yöntemleri başta oldukça karmaşık gözükür. Hele benim gibi zıplamayan kâğıt kurbağalara sahip bir kişi için, gözükmekten öte karmaşıktır. Ancak aynı cetvel ve pergeli yardımıyla yapılan çizimler de olduğu gibi, origami için de bir dizi aksiyom vardır. Şimdilik bilinen en güçlü origami aksiyomları ise İtalyan-Japon matematikçi *Humiaki Huzita*'nın ortaya koyduklarıdır:

(O1)  $p_1$  ve  $p_2$  noktası verildiğinde, bunları birbirleştiren bir doğru katlayabiliriz.

(O2) Verilen  $p_1$  ve  $p_2$  noktası için,  $p_1$  noktasını  $p_2$ 'nin üstüne katlayabiliriz.

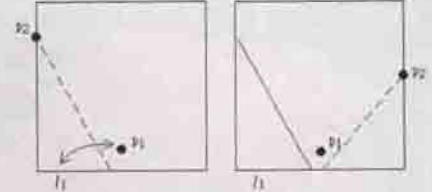
(O3)  $l_1$  ve  $l_2$  doğruları verildiğinde,  $l_1$  doğrusunu  $l_2$ 'nin üstüne katlayabiliriz.

(O4) Verilen bir  $p_1$  noktası ve  $l_1$  doğrusu için,  $l_1$ 'e dik ve  $p_1$  noktasından geçen bir katlama yapılabiliriz.

(O5) Verilen  $p_1$  ve  $p_2$  noktaları ile  $l_1$  doğrusu için,  $p_2$  noktasından geçecek ve  $p_1$  noktasını  $l_1$  doğrusunun üstüne getirecek bir katlama yapılabiliriz.

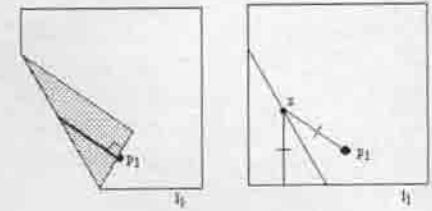
(O6)  $p_1$  ve  $p_2$  noktaları ile  $l_1$  ve  $l_2$  doğruları verildiğinde,  $p_1$  noktasını  $l_1$  ve  $p_2$  noktasını  $l_2$  doğrusu üstüne getirecek bir katlama yapılabiliriz.

Huzita'nın ilk 4 aksiyomunu kâğıt üstünde görmek oldukça kolaydır. Ancak 5. ve 6. aksiyomlar, alışmak için biraz daha zaman isterler. İlgiye değer bir nokta ise, ilk 5 aksiyomdaki işlemlerin aslında cetvel ve pergeli kullanarak da elde edilebileceğidir. Gelin, önce 5. ve 6. aksiyomlara biraz daha ısınalım:



\* Kare şeklinde bir kâğıt alalım. Karenin alt kenarına  $l_1$  ve kâğıdın ortasında  $l_1$ 'e yakın bir noktaya  $p_1$  diyelim. Daha sonra kâğıdın sağ ya da sol kenarında, herhangi bir yerde, bir  $p_2$  noktası belirleyelim ve (O5) aksiyomunu uygulayalım. Ardından farklı bir  $p_2$  noktası daha seçelim. Bunu 8 ya da 9 kez tekrarlayalım. Sonuçta ne mi olur?

Sonuçta ortaya çıkan, kâğıtta bir parabol şeklinin belirmesi olacaktır.



Bunun nedenini görmek için, önce alıştırmamızdaki katlamalardan birini yapalım. Katlı parçayı tekrar açmadan önce, koyu bir siyah kalem alalım ve  $l_1$ 'in katlı olan kısmına dik olacak şekilde  $p_1$  noktasından katlı parçaya bir doğru çizelim (Yukarıda soldaki şekilde olduğu gibi). Eğer kalemimiz yeterince koyu olur ve biraz da akıtırsa, çizdiğimiz kâğıdın hem arkasına hem de katlı kısmın altına geçebilir. Böylece katlı kısmı açtığımızda, karşımıza iki doğru çıkacaktır (Yukarıda sağdaki şekilde olduğu gibi). Dikkat edilmesi gereken nokta, her iki doğrunun da aynı uzunluğa sahip olduğu ve bunlardan birinin  $l_1$ 'e dik olduğudur. Bu da göstermektedir ki, katlamanın yapıldığı çizgi üzerinde yalnızca bir nokta  $p_1$  noktası ve  $l_1$  doğrusuna eşit uzaklıktadır (Sağdaki şekilde x noktası). Diğer bir deyişle; katlama çizgimiz, odak noktası  $p_1$  ve doğrultmanı  $l_1$  doğrusu olan parabole teğettir. Yani origami, basit de olsa analiz bile yapmamıza olanak sağlamaktadır. Biraz daha uğraşarsak, katlamaların yapıldığı doğrular zarfının bir parabol oluşturduğunu görmek de işten bile değildir.

Bu alıştırmamızda gözlenmesi gereken çok önemli bir nokta ise, parabolün ikinci dereceden denk-

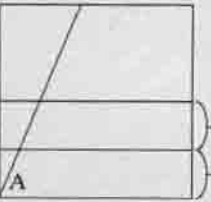
lemlerle verildiğidir. Dolayısıyla (O5), bizim için ikinci dereceden denklemleri de çözebilmektedir. Elbette, kâğıt katlayarak bir denklemi çözmek garip gözükebilir, ancak yaptığımızın matematik dilindeki tercümesi tam olarak budur.

\* Şimdi de (O6)'ya biraz uğraşalım. Dikkatimizi ilk çeken, (O6)'nın aslında (O5)'e çok benzediğidir. Hatta (O6),  $2x(O5)$  olarak bile nitelendirilebilir. (O6)'yı bu şekilde ifade etmemizin sebebi ise, aynen (O5)'te olduğu gibi, odağı  $p_1$  ile doğrultmanı  $l_1$  olan bir parabole ilaveten odağı  $p_2$  ve doğrultmanı  $l_2$  olan başka bir parabol daha elde etmemizdir. Tabii, eğer bir önceki alıştırmayı (O6) için uygularsak... Dolayısıyla (O6) kullanılarak, düzlemde çizilmiş iki parabol verildiğinde, her ikisine teğet bir doğru bulunabilmektedir.

Aslında bu yapılan da üçüncü dereceden bir denklemi çözmekle denktir. İşte bu, cetvel ve pergelle yapılamayacak bir iştir. Zaten bir açıyı üçe bölmek ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizmek de sonuçta üçüncü dereceden bir denklemi çözmeye indirgenebilir. O nedenle origami, cetvel ve pergelin tek başına beceremediği pek çok işlemi gerçekleştirebilmektedir. Şimdi dilerseniz, bu işlemlerden biri olan açının origamiyle üçe bölünmesini birlikte inceleyelim.

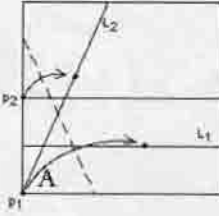
## Açı Nasıl Üçe Bölünür?

İşte böyle... 1970'lerde Hisashi Abe'in geliştirdiği bu yöntemle:



1. Üçe bölmeğimiz açı, kâğıdımızın alt sol köşesinde bulunsun. Bu açıya A diyelim. (Unutmayalım ki, burada A'nın bir dar açı olduğunu varsayıyoruz, fakat bu yöntemi geniş açılara uyarlamak da son derece kolaydır.) Şimdi de alt kısımda, birbirine paralel ve eşit uzaklıkta katlama çizgileri oluşturalım.

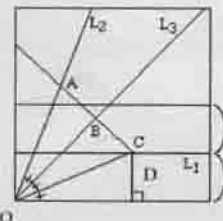
2. Sıra (O6)'yı uygulamaya geldi.  $p_1$ 'i  $L_1$ ,  $p_2$ 'yi  $L_2$  üzerine katlayalım.



Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.) Belki birkaç denemeye katlama için doğru yer belirlenebilir.

3.  $L_1$  doğrusunun katlanmış kısmında kalan (yani kâğıdın arka yüzünde) kısmını uzatalım ve elde ettiğimiz yeni çizgiye  $L_3$  diyelim. Şimdi ikinci adımda yaptığımız katlamayı açalım ve  $L_3$ 'ü alt sol köşeye uzatalım. Dikkat edin, çünkü uzattığımız çizginin tam köşe noktasını bulması gerekli. Sürpriz!  $L_3$  çizgisi, şu anda tam olarak  $A/3$  açısını veriyor.

İyi ama, neden? Bu soruyu yine şekil üzerinde yanıtlamak da yarar var. Görüldüğü gibi, şeklimize birkaç çizgi daha eklendiğinde, artık AOB, BOC, COD üçgenlerinin benzer üçgenler olduğunu görmek oldukça kolay hale geliyor. Böylelikle AOB, BOC ve COD açıları birbirine eşit olduğundan, elimizde  $A/3$  açısı kalıyor.



## Arşimet Öyle Diyor

Her ne kadar, buraya kadar origaminin becerip cetvel ve pergelin yetersiz kaldığı işlemlerden söz ettiyssek de, cetvel-pergel ikilisinin hakkını da yememek gerekiyor. Çünkü ölçülendirilmiş bir cetvel (yani bildiğimiz anlamıyla bir cetvel) ile pergeli, açının üçe bölünmesi işini kolayca başarabiliyor. Bunu kim mi söylüyor? Arşimet... Arşimet'ten bu yana matematikçiler, eğer düzgün kenar vazifesi gören cetvelimizde iki nokta işaretlenirse, açının üçe bölünebileceğini biliyor ve söylüyorlar. Bu açıdan bakıldığında, origaminin yapabildiklerinin neden daha geniş alanlara yayıldığını anlamak, biraz daha kolaylaşıyor. Çünkü kâğıdın düzgün kenarı,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,... oranlarında katlanarak, origamide kolaylıkla ölçülendirilebiliyor. Şu ana kadar ise, origami ile ölçülendirilmiş cetvel ve pergelin detaylı bir karşılaştırması yapılmış değil.

Yapılmayan ya da daha doğrusu yapılamayan bir diğer iş de, Huzita'nın aksiyom listesine yeni aksiyomlar eklemek... Çünkü hâlâ origamiyle ilgili aksiyomların tamamlanıp tamamlanmadığı bilinmiyor. Meselâ, "Beşinci ya da daha büyük dereceden denklemleri çözmeyi sağlayacak bir katlama olabilir mi?" sorusu böyle bir aksiyomun doğmasını bekliyor. Ancak şimdiye kadar yapılan çalışmalar, yedinci bir aksiyomun olmadığına dair bir ışık yaksada; bu ışık, ispat olma yolundan oldukça uzakta... Yani matematikçiler öyle diyor!

Han Nazmi Özsöylev

Kaynaklar:  
Auckly, D. ve J. Cleveland, "Totally Real Origami and Impossible Paperfolding", American Mathematical Monthly, Mar: 1995, 215-226  
<http://www.math.uri.edu/~hull/geocunst.html>  
<http://www.lib.utexas.edu/Exhibits/origami/math/>  
<http://www.lib.utexas.edu/Exhibits/origami/images/>  
<http://www.origami.vancouver.bc.ca/info/history.html>  
<http://www.origami.vancouver.bc.ca/Pictures/>  
<http://www.netpage.org/~ema/origami>  
<http://www.parc.xerox.com/ops/projects/forum/1996/images/>