33. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Ülkemizden Sinan Güntürk ve Cem Mutlugün'ün üçüncülük aldığı matematik olimpiyadı sorularını dergimizin Eylül 1992 sayısında yayınlamıştık. Bu soruların çözümünü şimdi yayınlıyoruz.

SORULARIN ÇÖZÜMÜ

Albert ERKİP*, Semih KORAY*

Birinci Gün:

Soru 1:

$1<a<b<c$ olmak üzere, $abc-1$ tamsayının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünmesini sağlayan tüm a, b, c tamsayılarını bulunuz.

Çözüm:

$1<a<b<c$ koşulunu sağlayan a, b, c tamsayıları için,

$$R(a,b,c) = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

diyelim. Bu durumda

$$R(a,b,c) = 1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(a-1)(c-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)}$$

olduğundan, $R(a,b,c)>1$ ve $a>a'>1$, $b>b'>1$, $c>c'>1$ koşulunu sağlayan a',b',c' tamsayıları için $R(a,b,c) \leqslant R(a',b',c')$ olduğu görülür. Öte yandan, $R(a,b,c)$ nin tamsayı olabilmesi, yani $abc-1$ tamsayısının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünebilmesi için, a, b, c sayılarının ya hepsinin tek, ya da hepsinin çift olması gerektiği açıktır.

Önce $a \geqslant 4$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, eğer $R(a,b,c)$ tamsayı ise, $1<R(a,b,c) \leqslant R(4,6,8) = \frac{191}{105} <2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $a \geqslant 4$ ise, $R(a,b,c)$ tamsayı olamaz. Yani $R(a,b,c)$ nin tamsayı olabilmesi ya $a = 3$ ya da $a = 2$ olmalıdır.

Şimdi $a = 3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $R(a,b,c)$ tamsayı ise, $1 <R(a,b,c) \leqslant R(3,5,7) = \frac{104}{48} < 3$, yani $2 = R(3,b,c) = \frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}$ olması gerekir. Buradan da $4(b-1)(c-1) = 3bc-1$, dolayısıyla $bc-4b-4c = -5$, dolayısıyla da $(b-4)(c-4) = 16-5 = 11$ olması gerektiği çıkar. Bu ise, ancak $b-4 = 1$, $c-4 = 11$, yani $b = 5$, $c = 15$ olması durumunda olanaklıdır. Öte yandan, $R(3,5,15) = 2$ olduğu için, $a = 3$ durumunda tek çözüm, $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$'dir.

Şimdi de $a = 2$ durumunu inceleyelim. Bu sefer, $R(a,b,c)$ nin tamsayı olabilmesi için, $1<R(a,b,c) \leqslant R(2,4,6) = \frac{47}{15} < 4$ olmak zorundadır.
Yani ya $R(2,b,c) = 2$ ya da $R(2,b,c) = 3$ olmalıdır.

Ancak $R(2,b,c) = 2$ ise, buradan $2bc-1 = 2(b-1)(c-1)$, yani $2(b+c) = 3$ olması gerektiği çıkar ki, $b>1$ ve $c>1$ olduğundan bu olanaksızdır. Son olarak, $R(2,b,c) = 3$ olduğu duruma bakalım. Bu durumda, $3(b-1)(c-1) = 2bc-1$, dolayısıyla $bc-3b-3c = -4$, dolayısıyla da $(b-3)(c-3) = 9-4 = 5$ olmalıdır. Bu ise ancak $b-3 = 1$, $c-3 = 5$, yani $b = 4$, $c = 8$ olması durumunda olanaklıdır. Öte yandan $R(2,4,8) = 3$ olduğundan, $a = 2$ durumunda tek çözüm $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$'dir.

Sonuç olarak, verilen koşullar altında $abc-1$ tamsayısının $(a-1)(b-1)(c-1)$ ile bölünmesini sağlayan tam olarak iki çözüm vardır ve bunlar, $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$ ile $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$'dir.

Soru 2:

R ile reel sayılar kümesini gösterelim. Her reel x, y için

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

bağıntısını sağlayan tüm $f : R \to R$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$f : R \to R$ fonksiyonunun tüm x, y reel sayıları için

(1) $$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

bağıntısını sağladığını varsayalım. Buradan $x = 0$ olarak, her $y \in R$ için

(2) $$f(f(y)) = y + (f(0))^2$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da yine her $y \in R$ için

(3) $$f(f(-y)) = -y + (f(0))^2$$

olduğu görülür. Şimdi $f(x) = f(y)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (2) bağıntısı nedeniyle $x + (f(0))^2 = y + (f(0))^2$, yani $x = y$ olması gerekir. Yani f fonksiyonu birebirdir. Öte yandan, herhangi bir $y \in R$ verildiğinde, $x = f(y-(f(0))^2)$ alırsak, yine (2) bağıntısını kullanarak, $f(x) = y$ olduğunu görürüz. Yani f aynı zamanda örten bir fonksiyondur.

Şimdi (1) bağıntısında $y = 0$ alırsak, her $x \in R$ için

(4a) $$f(x^2 + f(0)) = (f(x))^2$$

ve

(4b) $$f(x^2 + f(0)) = (f(-x))^2$$

bağıntılarını elde ederiz. Dolayısıyla her reel x sayısı için ya $f(x) = f(-x)$ ya da $f(x) = -f(-x)$ olmak

Prof.Dr., ODTÜ Matematik Bölümü.

zorundadır. Ancak herhangi bir $x \in R$ için $f(x) = f(-x)$ ise, (2) ve (3) bağıntıları dolayısıyla $x = -x$, yani $x=0$ olması gerektiği görülür. Bu yüzden sıfırdan farklı her x reel sayısı için, $f(x) = -f(-x)$ olmak zorundadır. Ancak f birebir bir fonksiyon olduğundan, buradan da sıfırdan farklı her $x \in R$ için $f(x) \neq 0$ olması gerektiği çıkar. Öte yandan f aynı zamanda örten bir fonksiyon olduğu için, $f(0) = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda ise, (2) ve (4a) bağıntıları dolayısıyla, her $x \in R$ için

(5) $$f(f(x)) = x$$

ve

(6) $$f(x^2) = (f(x))^2$$

olduğu görülür. Buradaki son bağıntı ise, her $y \in R$ için, $y \geqslant 0$ ise, $f(y)) \geqslant 0$ olduğu anlamına gelir. Üstelik aynı zamanda f fonksiyonu birebir ve $f(0) = 0$ olduğundan, buradan da, her $y \in R$ için

(7) $$y > 0 \Rightarrow f(y) > 0$$

olduğu sonucu çıkar.

Diğer taraftan, (1), (5) ve (6) nedeniyle, her x, y $\in R$ için.

$f(x^2 + y) = f(x^2 + f(f(y))) = f(y) + (f(x))^2 = f(x^2) + f(y)$ olduğu, yani x, $y \in R$ ve $x \geqslant 0$ olduğu takdirde

(8) $$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

olduğu görülür.

Şimdi x, $y \in R$ ve $x > y$ olduğunu varsayalım. O zaman, (7) ve (8) bağeıntıları dolayısıyla,

$$f(x) = f((x-y) + y) = f(x-y) + f(y) > f(y)$$

sonucu elde edilir. Yani f artan bir fonksiyondur.

Nihayet herhangi bir $x \in R$ alalım ve $f(x)) > x$ olduğunu farzedelim. Bu durumda, f nin artan bir fonksiyon olması ve (5) bağıntısı nedeniyle

$$x = f(f(x)) > f(x)$$

biçiminde yukarıdaki varsayımımızla çelişen bir sonuç elde edilir. Benzer biçimde, $x > f(x)$ varsayımı da bizi bir çelişmeye götüreceğinden, her $x \in R$ için $f(x) = x$ olması gerektiği ortaya çıkar. Öte yandan, her $x \in R$ için $f(x) = x$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun (1) bağıntısını sağladığı kolaylıkla görülür.

Soru 3:

Uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Her bir nokta çifti bir kenar (yani bir doğru parçası) ile birleştiriliyor ve her kenar ya mavi veya kırmızıya boyanıyor ya da hiç boyanmadan bırakılıyor. Ayağıdaki koşulu sağlayan en küçük n sayısını bulunuz: Kenarlardan tam olarak n tanesi boyandığında, boyalı kenarların kümesi içinde mutlaka üç kenarı da aynı renkte olan bir üçgen bulunur.

Çözüm:

Önce toplam 36 kenardan tam olarak 33 tanesi boyandığı takdirde, boyalı kenarların kümesi içinde mutlaka üç kenarı da aynı renkte olan bir üçgen bulunduğunu gösterelim. Bu durumda aralarında boyanmamış üç kenardan her birinin en az bir köşesi bulunacak şekilde üç değişik nokta seçebiliriz. Geri kalan 6 noktayı kendi aralarında birleştiren tüm kenarların ise boyanmış olması gerekir. Bu noktaları $A_1, ..., A_6$ ile gösterirsek, A_1A_2, $A_1A_3, ...,$ A_1A_6 şeklindeki beş kenardan en az üçünün aynı renkte olması gerekir. Genelliği yitirmeden bu rengin mavi ve A_1A_2, A_1A_3 ve A_1A_4 kenarlarının da bu renkte olduğunu varsayalım. A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 kenarlarından en az biri maviye boyanmışsa, o zaman $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ üçgenlerinden en az birinin tüm kenarları mavi renkte olur. Aksi takdirde ise, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 kenarlarının hepsi kırmızıya boyanmış olacağından, bu kez de $A_2A_3A_4$ tüm kenarları aynı renkte olan bir üçgen olur.

Şimdi de boyalı kenarların kümesi içinde üç kenarı da aynı renkte olan hiçbir üçgen bulunmayacak biçimde 32 kenarın boyanıp 4 kenarın boyanmadan bırakılmasının olanaklı olduğunu gösterirsek, aranan sayının 33 olduğu ortaya çıkacaktır. Bunun için önce verilen 9 nokta içinden A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 gibi 5 nokta alalım. Bu noktaları birleştirerek elde edilen on kenardan A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 ve A_5A_1 kenarlarını maviye, geriye kalan beş kenarı da kırmızıya boyarsak, tüm kenarları aynı renkte hiçbir üçgenin oluşmadığı görülür. Şimdi verilen dokuz noktadan bu ilk beşi içinde bulunmayan altıncı bir nokta alalım ve bu noktaya A_6 diyelim. A_6A_1 kenarını boyamadan bırakalım; her $i \in \{2,3,4,5\}$ için ise, A_6A_i kenarını A_1A_i ile aynı renge boyayalım. Bu durumda yeni oluşturulan ve tüm kenarları boyalı üçgenlerden hiçbiri tek renkli olamaz. Çünkü eğer $A_6A_iA_j$ $\{i,j, \in \{2,3,4,5\}, \; i \neq j\}$ üçgeninin tüm kenarları aynı renkte olsaydı, $A_1A_iA_j$ üçgeninin de tüm kenarlarının aynı renge boyanmış olması gerekirdi. Şimdi ilk altı nokta içinde bulunmayan A_7 gibi yedince bir nokta alalım. A_2 noktasını A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 ile birleştiren tüm kenarlar boyanmış olduğundan, bir önceki işlemi, A_1'in rolünü A_2'ye, A_6'nın rolünü ise A_7'ye vererek tekrar edebiliriz. Yani A_7A_2 kenarını boyamadan bırakır, A_7A_i ($i \in \{1,3,4,5,6\}$) kenarını ise A_2A_i ile aynı renge boyarız. Yukarıdaki gibi, bu şekilde oluşan ve tüm kenarları boyalı üçgenlerden hiçbiri tek renkli olamaz. Nihayet verilen dokuz noktadan ilk yedisi içinde bulunmayanları A_8 ve A_9 ile gösterelim. Burada A_3 ile A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_7 noktalarını birleştiren tüm kenarlar boyanmış olduğundan, A_8, A_3 çifti, A_7, A_2 çiftinin rolünü oynayacak biçimde bir önceki işlemi uyarlayarak uygulayabiliriz. Son olarak, aynı işlem benzer biçimde A_9, A_4 çifti için yinelendiği takdirde, tüm kenarları aynı renkte hiçbir üçgen oluşmayacağı gibi, A_6A_1, A_7A_2, A_8A_3, A_9A_4 kenarları boyanmadan bırakılıp, geri kalan 32 kenar boyanmış olacaktır.

(Gelecek sayıda devam edecek.)